Εφαρμογές του Mathematica στην Γραμμική Άλγεβρα

Νίκος Καραμπετάκης

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Σύνολα

Άσκηση 1. (Πράξεις μεταξύ συνόλων)
Θεωρείστε τις παρακάτω δύο εκφράσεις :

"Linear Algebra"
"Calculus of variations"

Να δημιουργηθούν δύο σύνολα A,B που το καθένα θα περιέχει τα γράμματα που παρουσιάζονται σε κάθε έκφραση. Στη συνέχεια να βρεθεί η τομή των συνόλων και η ένωση των συνόλων A,B καθώς και τον αριθμό φορών που εμφανίζεται το κάθε γράμμα στις παραπάνω εκφράσεις.

Απάντηση.
Η εντολή Characters μας επιτρέπει να πάρουμε σε μορφή λίστας τα γράμματα που απαρτίζουν μια έκφραση. Έτσι θα έχουμε

```
A = Characters["Linear Algebra"]
{L, i, n, e, a, r,  , A, l, g, e, b, r, a}
B = Characters["Calculus of variations"]
```

Η τομή των δύο συνόλων γίνεται με την συνάρτηση Intersection όπως παρακάτω :

```
Intersection[A, B]
{ , a, i, l, n, r}
```

ενώ η ένωση των δύο συνόλων, με την μαθηματική έννοια γίνεται μέσω της συνάρτησης Union :

```
Union[A, B]
{ , a, A, b, c, C, e, f, g, i, l, L, n, o, r, s, t, u, v}
```

Παρατηρήστε ότι τα κεφαλαία και τα μικρά γράμματα επειδή έχουν διαφορετική κωδικοποίηση στον Η/Υ θεωρούνται διαφορετικά γράμματα. Αν θέλουμε να δούμε το πλήθος φορών που εμφανίζεται ο χαρακτήρας "a" στην λίστα A θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Count όπως παρακάτω :

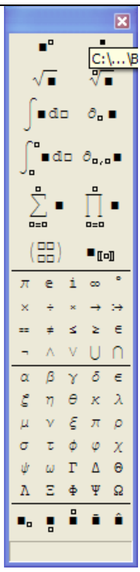
```
Count[A, "a"]
2
```

■

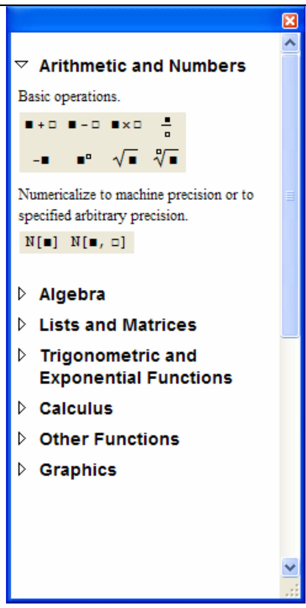
Πραγματικοί και Μιγαδικοί αριθμοί
Άσκηση 2. Να υπολογιστούν συμβολικά αλλά και προσεγγιστικά οι παρακάτω παραστάσεις στο Mathematica :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{6}}$$

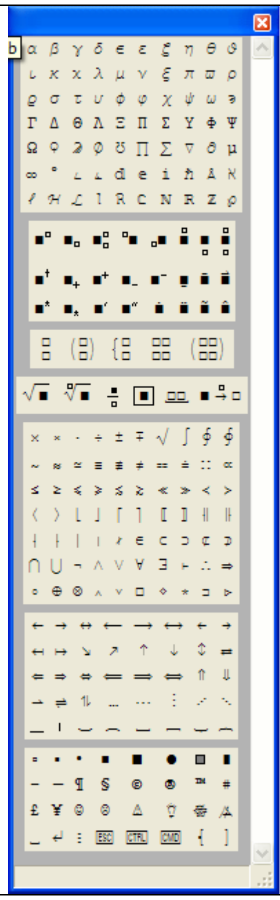
Απάντηση. Στόχος της άσκησης αυτής είναι να εξοικειώσει τον φοιτητή με γνωστές σταθερές στο Mathematica. Πολύ χρήσιμες μπορούν για τον σκοπό αυτό να φανούν οι παλέτες που διαθέτει το Mathematica και στις οποίες μπορεί να έχει πρόσβαση ο φοιτητής κάνοντας την επιλογή File->Palettes->(BasicInput, BasicTypesetting κ.λ.π.). Επιλέγοντας εικονίδια από τις παλέτες μπορεί να δημιουργήσει και την πιο σύνθετη έκφραση. Παρακάτω δίνουμε την μορφή μερικών από αυτές :



BasicInput

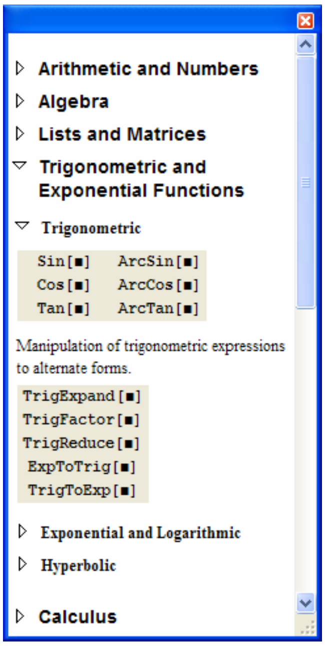


Basic Calculations



Basic Typesetting

Στο παράδειγμα μας θα μπορούσαμε να βρούμε την συνάρτηση του ημίτονου (Sin[]) και του συνημίτονου (Cos[]) από την παλέτα Basic Calculations :



Επιλέγοντας τα δεξιά τριγωνικά βέλη, οδηγούμαστε σε υπομενού, ενώ επιλέγοντας τα κάτω τριγωνικά βέλη αναδιπλώνουμε τα μενού που έχουν σχηματισθεί. Κάνοντας κλίκ στη συνάρτηση Sin[] εμφανίζεται η συνάρτηση του ημιτόνου που αναζητούμε. Καλό όμως θα είναι να εξοικειωθούμε με μερικές γνωστές συναρτήσεις. Σταθερές όπως το π (Pi) και το e (E) μπορούμε να τις επιλέξουμε από την παλέτα BasicInput. Έτσι η λύση στο παράδειγμα που ψάχνουμε θα είναι :

$$\mathbf{Sin}\left[\frac{\pi}{12}\right]$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Μια αριθμητική προσέγγιση του παραπάνω μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση N[παράσταση] ή N[παράσταση, πλήθος σημαντικών ψηφίων] :

$$\mathbf{N}\left[\mathbf{Sin}\left[\frac{\pi}{12}\right], 10\right]$$

0.2588190451

Έτσι για τα υπόλοιπα θα έχουμε :

$$\left\{\mathbf{Cos}\left[\frac{\mathbf{Pi}}{6}\right], e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{6}}\right\}$$

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{i\pi/3}, e^{i\pi/6}\right\}$$

N[%]

$$\{0.866025, 2.71828^{0.333333\, i\pi}, 2.71828^{0.166667\, i\pi}\}$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το {} για να σχηματίσουμε μια λίστα με αντικείμενα τις 3 παραστάσεις, ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο % για να αναφερθούμε στο αποτέλεσμα της προηγούμενης παράστασης (προκειμένου να μην την ξαναγράψουμε). Θα μπορούσαμε να αναφερθούμε στην προ-προηγούμενη παράσταση με το σύμβολο %% ή στην παράσταση που έχει μπροστά της τον συμβολισμό Out[1] με τον χαρακτηρισμό %1 π.χ. N[%1]. ■

1.3 Απεικονίσεις

Άσκηση 3. Να ορισθεί η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

και στη συνέχεια να εμφανίσετε τις εικόνες των $\{0,1,5\}$.

Απάντηση. Η συνάρτηση θα ορισθεί με τον παρακάτω τρόπο :

```
f[x_] := x^2 - 5 x + 6
```

Το σύμβολο _ στο όρισμα της συνάρτησης δηλώνει ότι η συνάρτηση θα υπολογίζεται για κάθε x. Στην θέση δηλαδή του x μπορεί να μπει οποιοσδήποτε αριθμός αλλά και οποιαδήποτε παράσταση. Παρατηρούμε ότι ανάμεσα στο όνομα της συνάρτησης και την τιμή της υπάρχει το := το οποίο δηλώνει ότι η τιμή της παράστασης θα υπολογισθεί εφόσον τοποθετηθεί το x και μετά (εκ των υστέρων) σε αντίθεση με το σύμβολο = το οποίο πρώτα υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης (με τον ορισμό της) και στη συνέχεια γίνεται απλώς αντικατάσταση του x.

```
g[x_] = Expand[(x + 1)^2]
1 + 2 x + x^2
g[a - 1]
1 + 2 (-1 + a) + (-1 + a)^2

w[x_] := Expand[(x + 1)^2]
w[a - 1]
a^2
```

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης για τα στοιχεία της λίστας {0,1,5} χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Map[συνάρτηση, λίστα]

```
Map[f, {0, 1, 5}]
{6, 2, 6}
```

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιώ μόνο το όνομα της συνάρτησης f και όχι f[x]. ■

1.4 Πολυώνυμα και πολυωνυμικές εξισώσεις

Τα πολυώνυμα στο MATHEMATICA.

Οι συναρτήσεις Expand[] και Factor[] μας βοηθούν όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα στην εύρεση του αναπτύγματος και στην παραγοντοποίηση παραστάσεων, όχι κατά ανάγκη πολυωνυμικών πάντα.

Παράδειγμα.

α) Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα του $(x+1)^5$,

β) Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$,

γ) Να βρεθεί η λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2$,

Απάντηση.

α) Το ανάπτυγμα μιας παράστασης υπολογίζεται με την συνάρτηση Expand[παράσταση].

```
Expand[(x+1)^5]
1 + 5 x + 10 x^2 + 10 x^3 + 5 x^4 + x^5
```

β) Η παραγοντοποίηση μιας παράστασης υπολογίζεται με την συνάρτηση Factor[παράσταση].

```
Factor[(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3]
-3 (a - b) (a - c) (b - c)
```

γ) Η επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης γίνεται με την Solve[εξίσωση,μεταβλητή].

```
Solve[3 (x+3)^2 + 5 (x+5)^2 == 8 (x+8)^2, x]
{{x -> -6}}
```

Θα πρέπει να παρατηρήσετε προσεχτικά την σύνταξη της Solve : α) το πρώτο όρισμα είναι η εξίσωση στην οποία έχω δύο ίσον (==), β) το δεύτερο όρισμα είναι η μεταβλητή ως προς την οποία θα λύσω την εξίσωση. Θα μπορούσα να έχω και σύστημα εξισώσεων π.χ.

```
Solve[{x/3 + y/2 == 4/3, x/y - 1/2 == 0}, {x, y}]
{{x -> 1, y -> 2}}
```

όπου τώρα οι εξισώσεις και τα ορίσματα τοποθετούνται μέσα σε άγκιστρο. Στην περίπτωση που η συνάρτηση Solve δεν μπορέσει να λύσει συμβολικά το πρόβλημα, τότε χρησιμοποιούμε την NSolve με την ίδια ακριβώς σύνταξη, ενώ αν η εξίσωση δεν λύνεται αλγεβρικά χρησιμοποιούμε την FindRoot δίνοντας μια αρχική προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης :

```
Solve[x^6 + 5 x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]
{{x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 1]},
 {x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 2]},
 {x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 3]},
 {x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 4]},
 {x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 5]},
 {x -> Root[1 + #1 + #1^2 + #1^3 + #1^4 + 5 #1^5 + #1^6 &, 6]}}
```

Η συνάρτηση Root[f,k] αναφέρεται στην k ρίζα της εξίσωσης f[x]=0.

```
NSolve[x^6 + 5 x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]
{{x -> -4.82836}, {x -> -0.692265}, {x -> -0.268597 - 0.648486 i},
 {x -> -0.268597 + 0.648486 i}, {x -> 0.52891 - 0.572276 i}, {x -> 0.52891 + 0.572276 i}}
```

```
NSolve[{Log[x] + Log[y] == 2, e^x - e^y == 2}, {x, y}]
Solve::tdep : The equations appear to involve the
   variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. More…
NSolve[{Log[x] + Log[y] == 2, e^x - e^y == 2}, {x, y}]
```

```
FindRoot[{Log[x] + Log[y] == 2, e^x - e^y == 2}, {x, 1}, {y, 1}]
{x → 2.78497, y → 2.65319}
```

■

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το παράδειγμα 1.5.11.3 με την βοήθεια της συνάρτησης Root[f,k].

Παράδειγμα.

Έστω ότι $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 4$.

a. Υπολογίστε την παράσταση $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$.

b. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο που έχει ρίζες τις $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$

Απάντηση

α)

In[1]:= $\frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,1]} + \frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,2]} + \frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,3]}$ // Simplify

Out[1]= $-\frac{3}{4}$

β)

In[2]:= $\left(s - \frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,1]}\right)\left(s - \frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,2]}\right)\left(s - \frac{1}{\text{Root}[2\#^3+\#^2+3\#+4\&,3]}\right)$ // Simplify

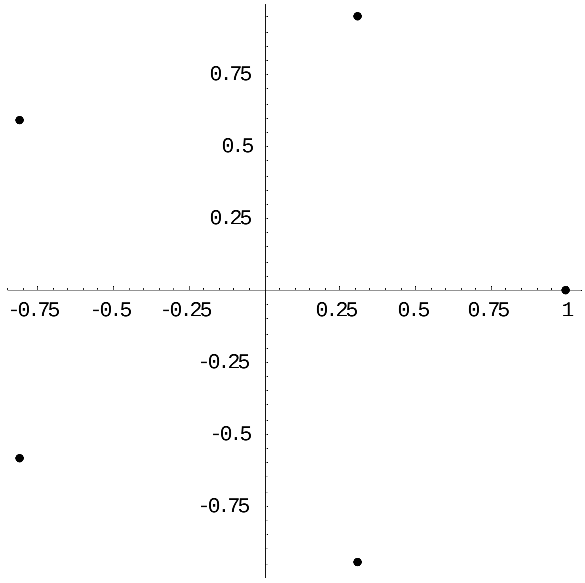
Out[2]= $\frac{1}{4}(4s^3 + 3s^2 + s + 2)$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή Root[] για να απεικονίσουμε τις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, όπως φαίνεται παρακάτω :

In[1]:= **$n = 5$; $s =$ Table[{Re[Root[$\#^n - 1$, k]], Im[Root[$\#^n - 1$, k]]}, {k, 1, n}];**

Η παραπάνω εντολή δημιουργεί μια λίστα με το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ριζών της εξίσωσης $z^5 - 1 = 0$ (αλλάζοντας το n, μπορούμε να ενεργήσουμε αντίστοιχα για μεγαλύτερου βαθμού εξισώσεις).

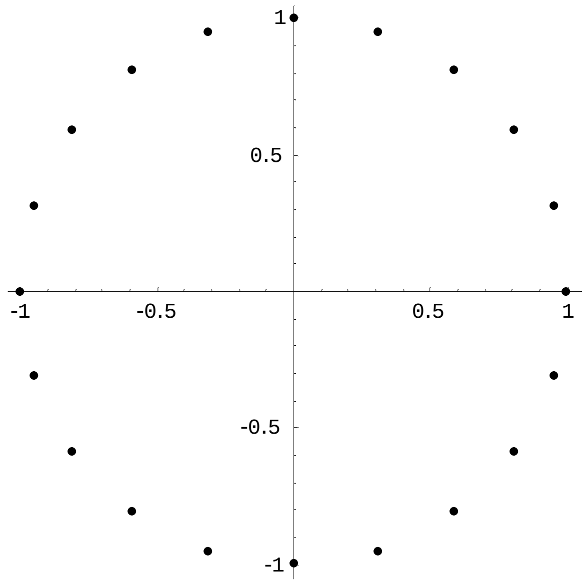
```
In[2]:= ListPlot[s, PlotStyle→PointSize[0.02], AspectRatio→1]
```



Η παραπάνω εντολή απεικονίζει τα σημεία με μέγεθος 0.02 και κρατάει την αναλογία των αξόνων x-y σταθερη και ίση με 1. Παρακάτω δίνουμε ένα ακόμα παράδειγμα για n=20 (τι παρατηρείται ;)

```
In[3]:= n = 20; s = Table[{Re[Root[#^n − 1, k]], Im[Root[#^n − 1, k]]}, {k, 1, n}];
```

```
In[4]:= ListPlot[s, PlotStyle→PointSize[0.02], AspectRatio→1]
```



Η εύρεση του πηλίκου και υπόλοιπου διαίρεσης πολυωνύμων γίνεται με τις συναρτήσεις PolynomialQuotient[] και PolynomialRemaider[]. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης των πολυώνυμων $f(x)=x^4-x^3+2x-3$, $g(x)=x^2-1$. Θα έχουμε :

```
In[1]:= PolynomialQuotient[x^4 - x^3 + 2 x - 3, x^2 - 1, x]
```

Out[1]= $x^2 - x + 1$

```
In[2]:= PolynomialRemainder[x^4 - x^3 + 2 x - 3, x^2 - 1, x]
```

Out[2]= $x - 2$

1.5 Μαθηματική επαγωγή

Άσκηση 5. Να δειχθεί η σχέση

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Απάντηση. Το Mathematica δεν είναι σε θέση να αποδεικνύει σχέσεις, αλλά μπορεί να υπολογίζει παραστάσεις. Συνεπώς στην παραπάνω παράσταση μπορούμε με την συνάρτηση Sum[όρος,{μεταβλητή,αρχή,τέλος}] να υπολογίσουμε το άθροισμα που βρίσκεται αριστερά του ίσον :

```
Sum[1/(i (i + 1)), {i, 1, n}]
```

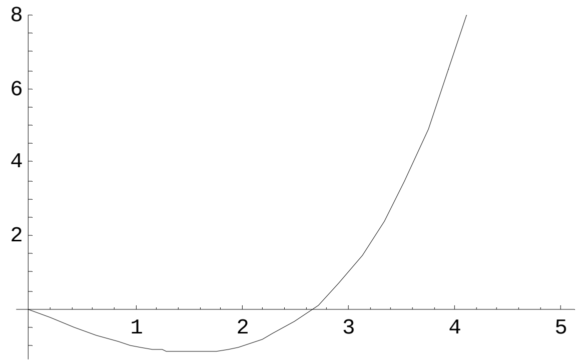
$$\frac{n}{1+n}$$

αποδεικνύοντας το ζητούμενο της άσκησης. Ο παραπάνω τρόπος δεν δουλεύει όμως σε όλες τις ασκήσεις, όπου η επαγωγή είναι απαραίτητη. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να δείξουμε ότι $2^n > 2n+1, n \geq 3$. Η συνάρτηση του Mathematica η οποία λύνει ανισότητες είναι η InequalitySolve[] (έχει την ίδια σύνταξη με την Solve[]) η οποία όμως βρίσκεται στο πακέτο συναρτήσεων Algebra, το οποίο θα πρέπει πρώτα να καλέσουμε προκειμένου να εκτελέσουμε την συνάρτηση αυτή (Δεν υπάρχουν όλες οι συναρτήσεις φορτωμένες στον πυρήνα του Mathematica. Ένα σύνολο συναρτήσεων θα πρέπει να καλούνται ξεχωριστά.) Συνεπώς θα έχουμε :

```
<< Algebra`
InequalitySolve[2^n > 2 n + 1, n]
InequalitySolve :: npi :
 A nonpolynomial equation or inequality encountered . The solution set may be incorrect .
n > 2.65986
```

Το σύμβολο //N που εμφανίζεται στο τέλος της εντολής δηλώνει ότι θα πρέπει στην εντολή να εφαρμοσθεί η συνάρτηση N[], δηλαδή να πάρουμε προσεγγιστικά αποτελέσματα. Η παραπάνω απάντηση αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο τα αποτελέσματα να μην είναι σωστά μιας και έχουμε μια μη πολυωνυμική ανίσωση. Η γραφική παράσταση της $2^n - 2n - 1$ μας δίνει επίσης μια εικόνα για το αν η ανισότητα ικανοποιείται η όχι χωρίς όμως να εγγυάται τα αποτελέσματα μιας και δεν μπορούμε να εξαντλήσουμε το πεδίο τιμών της συνάρτησης :

```
Plot[2^n - 2 n - 1, {n, 0, 5}]
```



Η συνάρτηση Plot[] δέχεται ως πρώτο όρισμα την συνάρτηση *f(n)* και ως δεύτερο όρισμα το πεδίο τιμών της συνάρτησης (το n παίρνει τιμές από 0 έως 5). ■

Άσκηση 6. Να δειχθεί ότι δεν ισχύει η παρακάτω εικασία :
«Οι αριθμοί της μορφής $2^p - 1$ όπου *p* πρώτος αριθμός είναι πρώτοι»

Απάντηση. Παρόλο που το Mathematica δεν μπορεί να αποδείξει με επαγωγή τις σχέσεις που του δίνουμε, μπορεί παρόλα αυτά να απορρίψει εικασίες που του ζητάμε να δείξει ότι δεν ισχύουν. Στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσαμε να δίνουμε τιμές στον p από τους πρώτους αριθμούς και να ελέγχουμε αν οι αριθμοί της μορφής $2^p - 1$ είναι πρώτοι. Θα σταματήσουμε όταν βρούμε τον πρώτο μη πρώτο αριθμό. Οι συναρτήσεις που θα μας χρειασθούν είναι οι : α) Prime[i] που υπολογίζει τον i πρώτο πρώτο αριθμό, και β) PrimeQ[k] που ελέγχει αν ο k είναι πρώτος αριθμός, απαντώντας με True ή False αντίστοιχα.

```
i = 1;
While[PrimeQ[2^Prime[i] - 1], ++i];
i
FactorInteger[2^Prime[i] - 1]
5
{{23, 1}, {89, 1}}
```

Στην πρώτη γραμμή του προγράμματος δίνουμε στο I την τιμή 1, ώστε να ξεκινήσει ο έλεγχος από τον αριθμό $2^2 - 1$ όπου Prime[1]=2. Στην δεύτερη γραμμή, όσο ο αριθμός $2^{Prime[i]} - 1$ είναι πρώτος, προχωρούμε επιλέγοντας τον επόμενο πρώτο πρώτο αριθμό θέτοντας ++i ή ισοδύναμα i=i+1 (δηλ. την επόμενη τιμή του i). Στην Τρίτη γραμμή εκτυπώνουμε ποιος στη σειρά από τους πρώτους αριθμούς είναι αυτός για τον οποίο δεν ικανοποιείται η εικασία (είναι ο 5^{ος} δηλ. Prime[5]=23*89). Μπορείτε να υπολογίσετε ποιος είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός για τον οποίον δεν ικανοποιείται η εικασία ; ■

Κεφάλαιο 2. Γραμμικά συστήματα.

1. Γραμμικά συστήματα.

Άσκηση 1. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα :

$$ax + y + z = 1$$
$$x + ay + z = a$$
$$x + y + az = a^2$$

Να γίνει πλήρης διερεύνηση για τις τιμές του *α*.

Απάντηση. Η συνάρτηση που επιλύει συστήματα είναι η Solve[] η οποία δέχεται δύο ορίσματα : α) την(ις) εξίσωση(εις) που θέλουμε να επιλύσουμε, και β) την(ις) μεταβλητή(ές) ως προς τις οποίες θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση(εις). Στην περίπτωση που έχουμε πάνω από μια εξισώσεις θα πρέπει να τις τοποθετήσουμε σε άγκιστρο. Το ίδιο ισχύει και για τις μεταβλητές ως προς τις οποίες θέλουμε να πάρουμε την λύση. Η συνάρτηση Solve[] δεν κάνει διερεύνηση. Αντίθετα η συνάρτηση Reduce[] που έχει την ίδια σύνταξη με την Solve[] κάνει επιπλέον και διερεύνηση.

```
Reduce[{a x + y + z == 1, x + a y + z == a, x + y + a z == a^2}, {x, y, z}]
```

$$a == 1 \&\& z == 1 - x - y \;||\; (-1 + a)(2 + a) \neq 0 \&\& x == \frac{-1 - a}{2 + a} \&\& y == 1 + x \&\& z == 1 - a x - y$$

Παρατηρήστε ότι μεταξύ των a,x αφήνω ένα κενό το οποίο το Mathematica το καταλαβαίνει ως το σύμβολο του πολ/μου. Διαφορετικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω τον τελεστή του πολ/μου *. Επίσης δεν χρησιμοποιώ το σύμβολο της ισότητας =, αλλά δύο φορές τον τελεστή αυτόν = =. Ο τελεστής της δύναμης είναι ο ^ ή μπορώ να χρησιμοποιήσω τον συνδυασμό των πλήκτρων Ctrl+^.
Η λύση που έχω είναι : α) όταν α=1 η $z = 1 - x - y$, και β) αν $(a-1)(a+2) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -2$ η λύση είναι : $x = \dfrac{-1-a}{2+a}, y = 1 + x, z = 1 - ax - y$.
Προφανώς δεν υπάρχει λύση για α=-2. ■

2. Μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Άσκηση 2. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

$$x + y + 2z = 3$$
$$2x + 2y + 3z = 5$$
$$x - y = 5$$

Απάντηση. Το παραπάνω σύστημα γράφεται σε μορφή πινάκων ως :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

Δίνουμε στο Mathematica, τον πίνακα A,

```
A = {{1, 1, 2}, {2, 2, 3}, {1, -1, 0}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και τον πίνακα B,

```
B = {{3}, {5}, {5}}
```

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια παίρνω τον σύνθετο πίνακα $M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση AppendRows[] από το πακέτο συναρτήσεων LinearAlgebra του Mathematica το οποίο και καλώ πρώτα :

```
<< LinearAlgebra`
M = AppendRows[A, B]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δίνουμε ένα πρόγραμμα στο Mathematica (από τον Prof. John Mathews, http://math.fullerton.edu/mathews/) το οποίο εφαρμόζει την μέθοδο του Gauss.

```
In[53]:= GaussJordan[A0_] :=
   Module[ {A = A0, i, k, p, n},
    n = Dimensions[A0][[1]];
    Print["The compound matrix is -> ", MatrixForm[A]];
    For[ p = 1, p ≤ n, p++,
     For[ k = p + 1, k ≤ n, k++,
      If[ Abs[A[[k, p]]] > Abs[A[[p, p]]],
        A[[{p, k}]] = A[[{k, p}]]; Print["Change row ", k, " with row ", p, "->", MatrixForm[A]];];];
     Print["(row ", p, ")/(", A[[p, p]], ")->"]; A[[p]] = A[[p]]/A[[p, p]]; Print[MatrixForm[A]];

     For[ i = 1, i ≤ n, i++,
      If[ i ≠ p,
        Print["(row ", i, ")-", " (row ", p, ") *( ", A[[i, p]], ")->"];
        A[[i]] = A[[i]] - A[[i, p]] A[[p]] ; Print[MatrixForm[A]];];

      ];];
    Return[ A ]; ]
```

2η γραμμή. Ορισμός τοπικών μεταβλητών.
3η γραμμή. Υπολογισμός του πλήθους των γραμμών του πίνακα A0.
5η γραμμή. Από την p=1η ως και την p=n-οστή στήλη κάνε τα εξής :

- **6η γραμμή.** Από την k=p+1 γραμμή έως και την k=n γραμμή κάνε τα εξής :
  - **7η γραμμή.** Αν η απόλυτη τιμή του στοιχείου A[k,p] είναι απολύτως μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή του στοιχείου A[p,p] τότε άλλαξε την γραμμή k με την γραμμή p.
- **9η γραμμή.** Διαίρεσε την γραμμή p με το στοιχείο A[p,p].

$10^η$ γραμμή. Σε όλες τις γραμμές i εκτός από την p γραμμή, αφαίρεσε την γραμμή p πολλαπλασιασμένη επί το στοιχείο A[i,p].

Εφαρμόζοντας το παραπάνω πρόγραμμα θα έχουμε :

GaussJordan[M]

The compound matrix is −> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Change row 2 with row 1−> $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(row 1)/(2)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(row 2)− (row 1) ∗(1)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(row 3)− (row 1) ∗(1)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Change row 3 with row 2−> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(row 2)/(−2)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(row 1)− (row 2) ∗(1)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(row 3)− (row 2) ∗(0)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(row 3)/($\frac{1}{2}$)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(row 1)− (row 3) ∗($\frac{3}{4}$)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(row 2)− (row 3) ∗($\frac{3}{4}$)−>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει από την τελευταία στήλη του πίνακα M δηλ. είναι x=3, y=-2 και z=1. Το παραπάνω σύστημα θα μπορούσε να λυθεί και με την συνάρτηση LinearSolve[] που δέχεται ως πρώτο όρισμα τον πίνακα A και ως δεύτερο όρισμα τον πίνακα B,

```
LinearSolve[A, B]
{{3}, {-2}, {1}}
```

■

3. Γεωμετρική σημασία γραμμικών συστημάτων.

Άσκηση 3.
α) Να σχεδιασθούν οι ευθείες :

$$x - y = -1$$
$$2x + y = 4$$

β) Να σχεδιασθούν οι ευθείες :

$$x - y = -1$$
$$x - y = 1$$

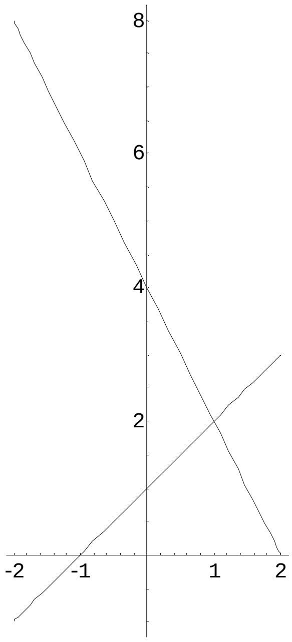
γ) Να σχεδιασθούν οι ευθείες :

$$-6x+3y=-6$$
$$2x-y=2$$

Απάντηση.

α) Μπορούμε να κάνουμε χρήση της συνάρτησης ImplicitPlot[], η οποία δέχεται δύο ορίσματα : α) την(ις) εξισώση(εις) της(ων) καμπύλης(ων) που θέλουμε να σχεδιάσουμε, β) το πεδίο ορισμού για το οποίο θα γίνει η γραφική παράσταση. Η συνάρτηση ImplicitPlot[] ανήκει στο πακέτο Graphics το οποίο και θα πρέπει να καλέσουμε πρώτο.

```
<< Graphics`
ImplicitPlot[{x - y == -1, 2 x + y == 4}, {x, -2, 2}]
```

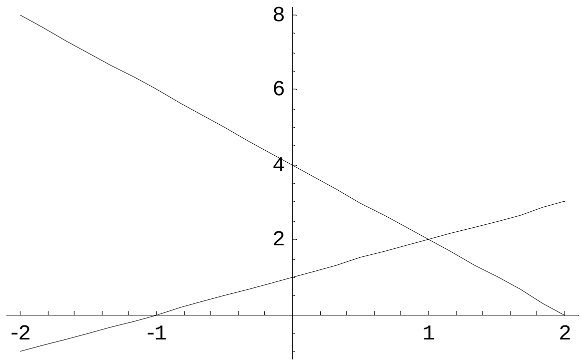



```
- Graphics -
```

Παρατηρούμε ότι οι δύο παραπάνω ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο τομής, το οποίο και είναι η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

Για την γραφική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και την συνάρτηση Plot[] που δέχεται ως πρώτο όρισμα την(ις) συνάρτηση(εις) μιας μεταβλητής που θέλουμε να σχεδιάσουμε, και ως δεύτερο όρισμα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Σε αντίθεση με την συνάρτηση ImplicitPlot[] που σχεδιάζει καμπύλες, που μπορεί και να μην είναι συναρτήσεις, η Plot[] σχεδιάζει μόνο συναρτήσεις.

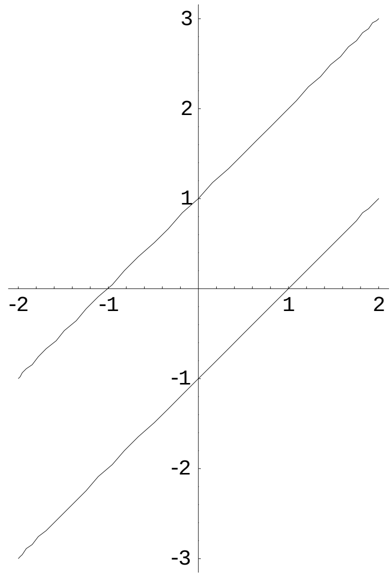
```
Plot[{1 + x, -2 x + 4}, {x, -2, 2}]
```



- Graphics -

β) Όμοια ενεργούμε στην δεύτερη περίπτωση όπου διαπιστώνουμε ότι οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο μιας και είναι παράλληλες.

```
ImplicitPlot[{x - y == -1, x - y == 1}, {x, -2, 2}]
```

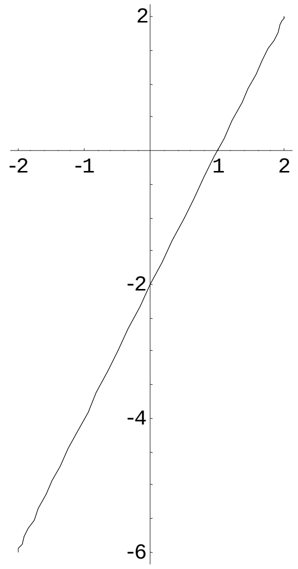


- Graphics -

Στην περίπτωση αυτή οι δύο ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και συνεπώς και το σύστημα των εξισώσεων δεν έχει καμιά κοινή λύση.

γ) Στο τρίτο σύστημα θα έχουμε :

```
ImplicitPlot[{-6 x + 3 y == -6, 2 x - y == 2}, {x, -2, 2}]
```



- Graphics -

Στην περίπτωση αυτή οι δύο ευθείες ταυτίζονται, γεγονός που σημαίνει ότι το σύστημα των εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις.

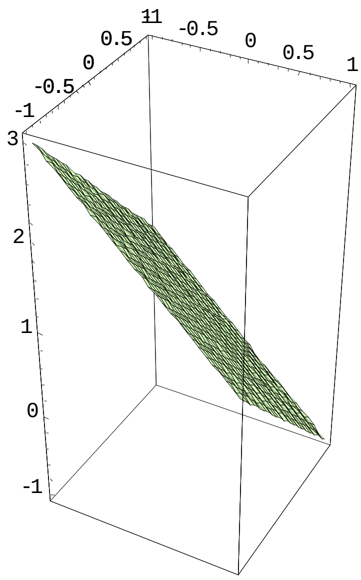
Άσκηση 4.
Να σχεδιασθούν τα επίπεδα :

$$x + y + z = 1$$
$$x + y = 1$$
$$x + y - z = 1$$

Απάντηση.
Για την σχεδίαση συναρτήσεων 2 μεταβλητών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Plot3D[] που δέχεται ως πρώτο όρισμα την(ις) συνάρτηση(εις) δύο μεταβλητών που θέλουμε να σχεδιάσουμε, και ως δεύτερο όρισμα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ParametricPlot3D[] στην οποία πρέπει να δώσουμε την παραμετρική μορφή της εξίσωσης $\left(x(t_1,t_2) \quad y(t_1,t_2) \quad z(t_1,t_2)\right)$ και ως δεύτερο και τρίτο όρισμα το πεδίο ορισμού των t_1,t_2, ή την παραμετρική μορφή της εξίσωσης $\left(x(t) \quad y(t) \quad z(t)\right)$ και ως δεύτερο όρισμα το πεδίο ορισμού του t.

Σχεδιάζουμε το πρώτο επίπεδο και την γραφική παράσταση την αποθηκεύουμε στην μεταβλητή p1,

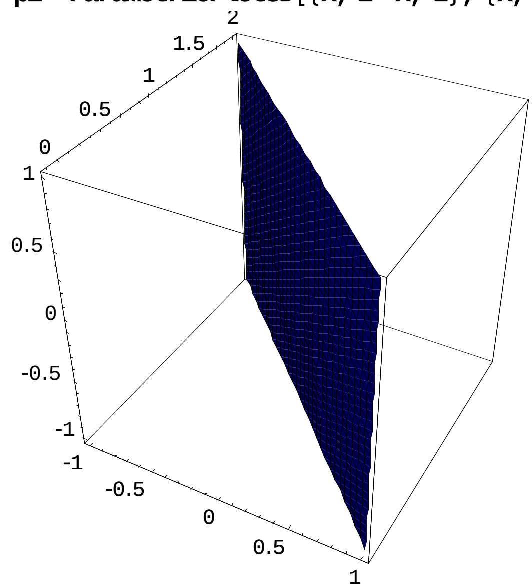
```
p1 = ParametricPlot3D[{x, y, 1 - x - y}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



- Graphics3D -

Σχεδιάζουμε το δεύτερο επίπεδο και την γραφική παράσταση την αποθηκεύουμε στην μεταβλητή p2,

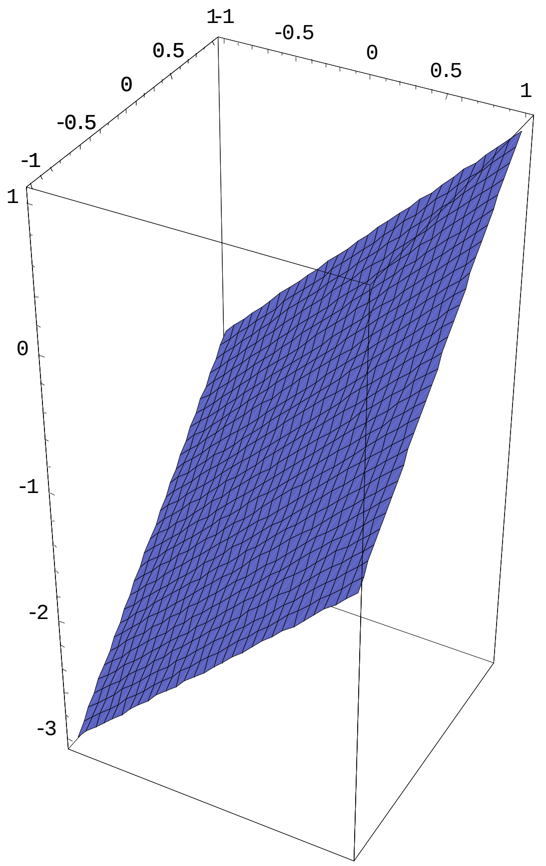
p2 = ParametricPlot3D[{**x, 1 - x, z**}, {**x, -1, 1**}, {**z, -1, 1**}]



- Graphics3D -

Σχεδιάζουμε το τρίτο επίπεδο και την γραφική παράσταση την αποθηκεύουμε στην μεταβλητή p3,

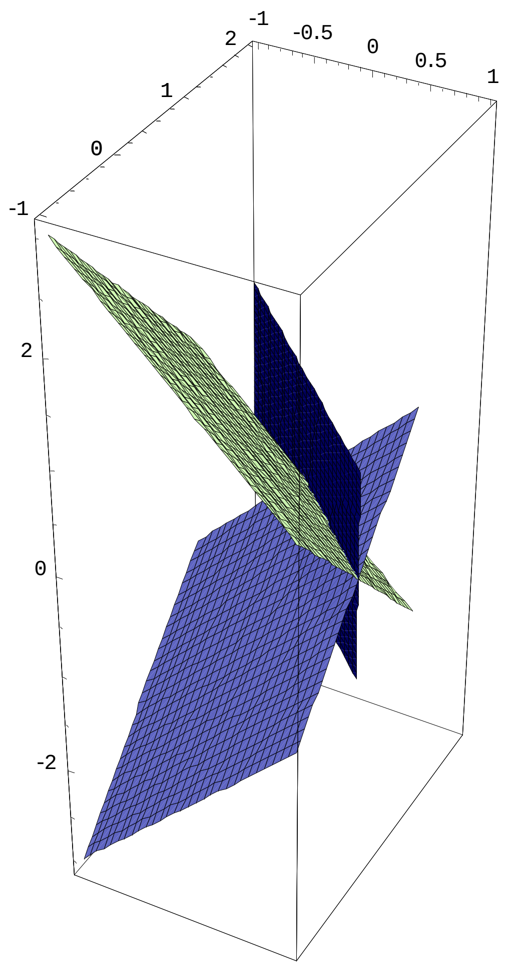
p3 = ParametricPlot3D[{**x, y, x + y - 1**}, {**x, -1, 1**}, {**y, -1, 1**}]



- Graphics3D -

Εμφανίζουμε όλες τις γραφικές παραστάσεις μαζί,

```
Show[p1, p2, p3]
```




```
- Graphics3D -
```

Παρατηρούμε ότι τα 3 επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Πράγματι αν λύσουμε το σύστημα, θα έχουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η ευθεία $\begin{pmatrix} x & 1-x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

```
Reduce[{x + y + z == 1, x + y == 1, x + y - z == 1}, {x, y, z}]
y == 1 - x && z == 0
```

Μπορείς να γράψεις ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους και να δείξεις γραφικά ότι τα 3 επίπεδα που περιγράφονται από τις 3 εξισώσεις δεν τέμνονται σε κάποιο κοινό σημείο; ■

Κεφάλαιο 3. Πίνακες

2-4. Πρόσθεση πινάκων, γινόμενο πίνακα με αριθμό, γινόμενο πινάκων, αντίστροφος πίνακας.

Άσκηση 1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες :

α) $A+B$

β) $3*A$

γ) $A*B, B*A$

δ) A^{-1}, B^{-1}

Απάντηση. Οι τελεστές που χρησιμοποιούμαι για την πρόσθεση, αφαίρεση και γινόμενο πινάκων είναι +,- και . αντίστοιχα. Ο πίνακας στο Mathematica είναι μια λίστα που έχει ως αντικείμενα λίστες με τα στοιχεία των γραμμών του πίνακα. Έτσι θα ορίσουμε πρώτα τους πίνακες μας A, B,

```
A = {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 5}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
B = {{2, 1, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 3}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα των πινάκων

```
A + B
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Το σύμβολο // μας λέει να εφαρμόσουμε την συνάρτηση που υπάρχει στα δεξιά του, στο αποτέλεσμα που θα έχουμε από την πρόσθεση των δύο πινάκων. Η συνάρτηση MatrixForm[] εμφανίζει το αποτέλεσμα σε μορφή πίνακα. Το γινόμενο του πίνακα A με το 3 είναι :

```
3 * A
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Τα γινόμενα A*B και B*A είναι αντίστοιχα :

```
A.B
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

B.A

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Παρατήρησε ότι ο τελεστής που χρησιμοποιούμε είναι . αντί *. Το * σε αντίθεση με το . θα δημιουργήσει τον πίνακα C που θα έχει ως στοιχεία τα $c_{ij} = a_{ij} * b_{ij}$ αντί του $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$ που έχουμε στο γινόμενο των δύο πινάκων. Ο αντίστροφος των πινάκων A,B υπολογίζεται με την συνάρτηση Inverse[],

Inverse[B]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

και

Inverse[A]

Inverse::sing : "Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ is singular. \!\(*ButtonBox[\(More…\), ButtonData:> General::sing , ButtonStyle-> RefGuideLinkText , ButtonFrame-> None]\)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Το μήνυμα που πήραμε για τον πίνακα A είναι ότι είναι singular δηλ. έχει ορίζουσα 0 και συνεπώς δεν αντιστρέφεται. Μπορούμε κάλλιστα να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A με την συνάρτηση Det[].

Det[A]

0

■

Άσκηση 2. Στον παρακάτω χάρτη βλέπουμε τους τρόπους με τους οποίους συνδέονται αεροπορικώς οι πόλεις 1,2,3,4,5,6.

Ο παρακάτω πίνακας παριστάνει τον τρόπο σύνδεσης των κόμβων 1,2,3,4,5,6 :

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας έχει διάσταση 6 όσοι και οι κόμβοι και επιπλεόν το στοιχείο του $a_{i,j}$ έχει την τιμή 1 αν μπορούμε να πάμε αεροπορικώς από την πόλη i στην πόλη j και 0 αν δεν μπορούμε να πάμε. Ο συνολικός αριθμός των συνδέσεων μεταξύ δύο κόμβων αν χρησιμοποιήσουμε έναν επιπλεόν σταθμό δηλ. έχουμε δύο συνδέσεις μεταξύ των i,j είναι :

$$a_{ij}^2=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+a_{i3}a_{3j}+a_{i4}a_{4j}+a_{i5}a_{5j}+a_{i6}a_{6j}$$

Συνεπώς ο πίνακας $A^2=\left[a_{ij}^2\right]$, μας δίνει τον συνολικό αριθμό των συνδέσεων μεταξύ δύο κόμβων όταν χρησιμοποιούμε υποχρεωτικά έναν ενδιάμεσο σταθμό. Άρα ο συνολικός αριθμός των συνδέσεων μεταξύ δύο κόμβων όταν χρησιμοποιούμε έναν ενδιάμεσο σταθμό ή όταν η σύνδεση γίνει απευθείας θα δίνεται από τα στοιχεία του πίνακα $A+A^2$. Παρόμοια ο συνολικός αριθμός των συνδέσεων μεταξύ δύο κόμβων όταν χρησιμοποιούμε δύο ενδιάμεσους σταθμούς, ή έναν ενδιάμεσο σταθμό ή όταν η σύνδεση γίνει απευθείας θα δίνεται από τα στοιχεία του πίνακα $A+A^2+A^3$. Να υπολογιστούν οι δυνατοί αριθμοί σύνδεσης για την τελευταία αυτή περίπτωση δηλ. να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα $A+A^2+A^3$.

Απάντηση. Η δύναμη ενός πίνακα δίνεται από την συνάρτηση MatrixPower[] η οποία δέχεται ως πρώτο όρισμα τον πίνακα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την δύναμη και ως δεύτερο όρισμα την δύναμη την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε. Έτσι θα έχουμε :

```
A = {
   {0, 0, 0, 1, 0, 0},
   {0, 0, 1, 1, 0, 0},
   {0, 1, 0, 1, 0, 0},
   {1, 1, 1, 0, 1, 1},
   {0, 0, 0, 1, 0, 0},
   {0, 0, 0, 1, 0, 0}};
```

Μπορούμε να πατάμε το πλήκτρο ENTER για να αλλάζουμε γραμμή χωρίς να εκτελούμε την συνάρτηση που γράφουμε. Το ερωτηματικό στο τέλος της γραμμής είναι για να μην εμφανίζονται τα αποτελέσματα. Το άθροισμα που ψάχνουμε να βρούμε είναι :

```
A + MatrixPower[A, 2] + MatrixPower[A, 3] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}1&2&2&6&1&1\\2&4&5&8&2&2\\2&5&4&8&2&2\\6&8&8&7&6&6\\1&2&2&6&1&1\\1&2&2&6&1&1\end{pmatrix}$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε την εντολή Sum[], που δέχεται ως πρώτο όρισμα την ακολουθία την οποία θέλουμε να αθροίσουμε και ως δεύτερο όρισμα την μεταβολή του δείκτη, θα έχουμε :

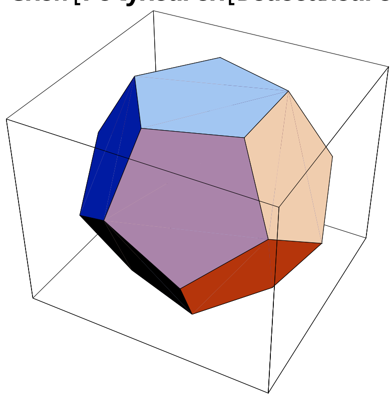
```
Sum[MatrixPower[A, i], {i, 1, 3}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 8 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 3. Στην άσκηση αυτή θα δείξουμε την εφαρμογή που έχουν οι πράξεις πινάκων στον κόσμο των γραφικών. Θεωρείστε το δωδεκάεδρον, το οποίο δίνεται από την συνάρτηση Dodecahedron[] που ανήκει στο πακέτο Graphics.

```
<< Graphics`Polyhedra`
Show[Polyhedron[Dodecahedron]]
```



```
- Graphics3D -
```

Το συγκεκριμένο σχήμα αποτελείται από πολύγωνα με συγκεκριμένες συντεταγμένες το καθένα, τις οποίες τις αποθηκεύουμε στην μεταβλητή s :

```
s = Dodecahedron[]
```

```
{Polygon[{{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651},
    {-0.649839, 0., 0.850651}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}, {0.525731, -0.381966, 0.850651}}],
 Polygon[{{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {0.525731, -0.381966, 0.850651},
    {0.850651, -0.618034, 0.200811}, {1.05146, 0., -0.200811}, {0.850651, 0.618034, 0.200811}}],
 Polygon[{{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {0.850651, 0.618034, 0.200811},
    {0.32492, 1., -0.200811}, {-0.32492, 1., 0.200811}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651}}],
 Polygon[{{-0.200811, 0.618034, 0.850651}, {-0.32492, 1., 0.200811},
    {-0.850651, 0.618034, -0.200811}, {-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.649839, 0., 0.850651}}],
 Polygon[{{-0.649839, 0., 0.850651}, {-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811},
    {-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}}],
 Polygon[{{-0.32492, -1., 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811}, {0.850651, -0.618034, 0.200811},
    {0.525731, -0.381966, 0.850651}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}}],
 Polygon[{{0.850651, 0.618034, 0.200811}, {1.05146, 0., -0.200811}, {0.649839, 0., -0.850651},
    {0.200811, 0.618034, -0.850651}, {0.32492, 1., -0.200811}}],
 Polygon[{{-0.32492, 1., 0.200811}, {0.32492, 1., -0.200811}, {0.200811, 0.618034, -0.850651},
    {-0.525731, 0.381966, -0.850651}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811}}],
 Polygon[{{-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651},
    {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811}}],
 Polygon[{{-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811},
    {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {0.200811, -0.618034, -0.850651}, {0.32492, -1., -0.200811}}],
 Polygon[{{0.850651, -0.618034, 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811},
    {0.200811, -0.618034, -0.850651}, {0.649839, 0., -0.850651}, {1.05146, 0., -0.200811}}],
 Polygon[{{0.200811, 0.618034, -0.850651}, {0.649839, 0., -0.850651}, {0.200811, -0.618034, -0.850651},
    {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651}}]}
```

Μπορούμε να διώξουμε την συνάρτηση Polygon[] από την παραπάνω λίστα με την συνάρτηση Flatten[],

```
s2 = Flatten[s, 1, Polygon]
```

```
{{{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651},
  {-0.649839, 0., 0.850651}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}, {0.525731, -0.381966, 0.850651}},
 {{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {0.525731, -0.381966, 0.850651},
  {0.850651, -0.618034, 0.200811}, {1.05146, 0., -0.200811}, {0.850651, 0.618034, 0.200811}},
 {{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {0.850651, 0.618034, 0.200811}, {0.32492, 1., -0.200811},
  {-0.32492, 1., 0.200811}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651}},
 {{-0.200811, 0.618034, 0.850651}, {-0.32492, 1., 0.200811}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811},
  {-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.649839, 0., 0.850651}}, {{-0.649839, 0., 0.850651}, {-1.05146, 0., 0.200811},
  {-0.850651, -0.618034, -0.200811}, {-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}},
 {{-0.32492, -1., 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811}, {0.850651, -0.618034, 0.200811},
  {0.525731, -0.381966, 0.850651}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}},
 {{0.850651, 0.618034, 0.200811}, {1.05146, 0., -0.200811}, {0.649839, 0., -0.850651},
  {0.200811, 0.618034, -0.850651}, {0.32492, 1., -0.200811}},
 {{-0.32492, 1., 0.200811}, {0.32492, 1., -0.200811}, {0.200811, 0.618034, -0.850651},
  {-0.525731, 0.381966, -0.850651}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811}},
 {{-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651},
  {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811}},
 {{-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811}, {-0.525731, -0.381966, -0.850651},
  {0.200811, -0.618034, -0.850651}, {0.32492, -1., -0.200811}},
 {{0.850651, -0.618034, 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811}, {0.200811, -0.618034, -0.850651},
  {0.649839, 0., -0.850651}, {1.05146, 0., -0.200811}},
 {{0.200811, 0.618034, -0.850651}, {0.649839, 0., -0.850651}, {0.200811, -0.618034, -0.850651},
  {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651}}}
```

Η παραπάνω λίστα αποτελείται από εξάδες από λίστες. Μπορούμε να καταργήσουμε τις εξάδες αυτές όπως φαίνεται παρακάτω :

```
s3 = Flatten[s2, 1]
```

```
{{0.525731, 0.381966, 0.850651}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651}, {-0.649839, 0., 0.850651},
 {-0.200811, -0.618034, 0.850651}, {0.525731, -0.381966, 0.850651}, {0.525731, 0.381966, 0.850651},
 {0.525731, -0.381966, 0.850651}, {0.850651, -0.618034, 0.200811}, {1.05146, 0., -0.200811},
 {0.850651, 0.618034, 0.200811}, {0.525731, 0.381966, 0.850651}, {0.850651, 0.618034, 0.200811},
 {0.32492, 1., -0.200811}, {-0.32492, 1., 0.200811}, {-0.200811, 0.618034, 0.850651},
 {-0.200811, 0.618034, 0.850651}, {-0.32492, 1., 0.200811}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811},
 {-1.05146, 0., 0.200811}, {-0.649839, 0., 0.850651}, {-0.649839, 0., 0.850651}, {-1.05146, 0., 0.200811},
 {-0.850651, -0.618034, -0.200811}, {-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651},
 {-0.32492, -1., 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811}, {0.850651, -0.618034, 0.200811},
 {0.525731, -0.381966, 0.850651}, {-0.200811, -0.618034, 0.850651}, {0.850651, 0.618034, 0.200811},
 {1.05146, 0., -0.200811}, {0.649839, 0., -0.850651}, {0.200811, 0.618034, -0.850651},
 {0.32492, 1., -0.200811}, {-0.32492, 1., 0.200811}, {0.32492, 1., -0.200811}, {0.200811, 0.618034, -0.850651},
 {-0.525731, 0.381966, -0.850651}, {-0.850651, 0.618034, -0.200811}, {-1.05146, 0., 0.200811},
 {-0.850651, 0.618034, -0.200811}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651}, {-0.525731, -0.381966, -0.850651},
 {-0.850651, -0.618034, -0.200811}, {-0.32492, -1., 0.200811}, {-0.850651, -0.618034, -0.200811},
 {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {0.200811, -0.618034, -0.850651}, {0.32492, -1., -0.200811},
 {0.850651, -0.618034, 0.200811}, {0.32492, -1., -0.200811}, {0.200811, -0.618034, -0.850651},
 {0.649839, 0., -0.850651}, {1.05146, 0., -0.200811}, {0.200811, 0.618034, -0.850651}, {0.649839, 0., -0.850651},
 {0.200811, -0.618034, -0.850651}, {-0.525731, -0.381966, -0.850651}, {-0.525731, 0.381966, -0.850651}}
```

Η μεγέθυνση ενός σχήματος ως προς τις συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix}^T$ γίνεται μέσω του παρακάτω πολ/μου :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix}$$

Έτσι θα έχουμε μεγέθυνση a φορές ως προς τον άξονα xx', b φορές ως προς τον άξονα y και c φορές ως προς τον άξονα zz'. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλουμε να μεγεθύνουμε το παραπάνω σχήμα 3 φορές ως προς τον άξονα xx'. Θα έχουμε λοιπόν:

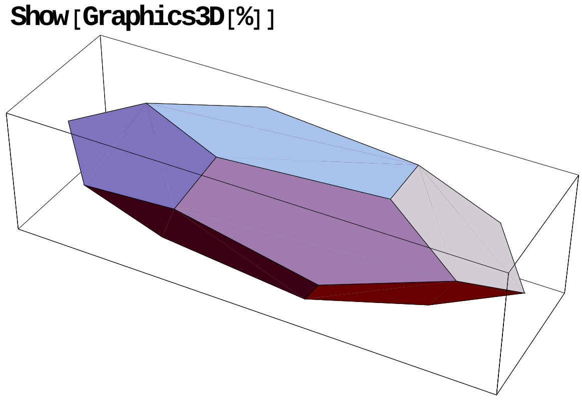
```
s4 = {{3, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}.Transpose[s3];
```

Θα πρέπει τις λίστες σημείων που έχουμε πάρει να τις χωρίσουμε πάλι σε πεντάδες (μέσω της εντολής Partition[]) και να εφαρμόσουμε την συνάρτηση Polygon[] σε κάθε πεντάδα, ώστε να σχηματιστούν οι έδρες του πολυγώνου.

```
s5 = Map[Polygon, Partition[Transpose[s4], 5]];
```

Τελικά θα έχουμε το παρακάτω σχήμα :

```
Show[Graphics3D[%]]
```



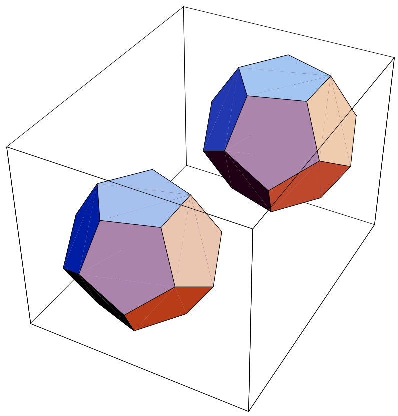
```
- Graphics3D -
```

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετακινήσουμε το αρχικό σχήμα κατά το διάνυσμα $s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Τότε θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα :

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θα έχουμε δηλαδή, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία :

```
s = Dodecahedron[];
s2 = Flatten[s, 1, Polygon];
s3 = Flatten[s2, 1];
s4 = Transpose[Table[{1, 2, 1}, {60}]] + Transpose[s3];
s5 = Map[Polygon, Partition[Transpose[s4], 5]];
Show[Polyhedron[Dodecahedron], Graphics3D[s5]]
```



- Graphics3D -

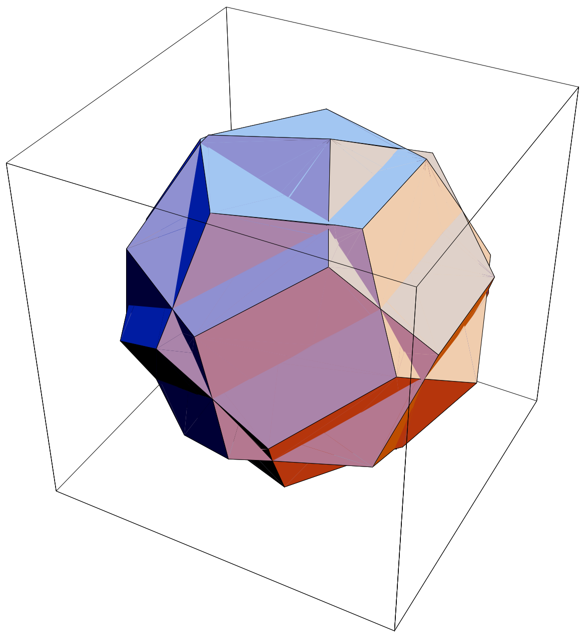
Παρατήρησε ότι στην 4η εντολή προσθέσαμε στα σημεία μας έναν πίνακα διαστάσεως 60x3 (όσα και τα σημεία του δωδεκάεδρου (το υπολογίζουμε με την συνάρτηση Length[])) που κάθε του γραμμή είναι το διάνυσμα s.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να στρίψουμε το αρχικό σχήμα ως προς τον άξονα yy', κατά γωνία $\theta = 45^0$. Τότε θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Θα έχουμε δηλαδή, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία :

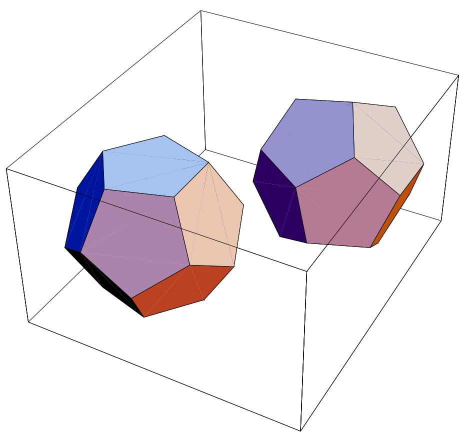
```
s = Dodecahedron[];
s2 = Flatten[s, 1, Polygon];
s3 = Flatten[s2, 1];
s4 = {{Cos[Pi/4], 0, Sin[Pi/4]}, {0, 1, 0}, {-Sin[Pi/4], 0, Cos[Pi/4]}}.Transpose[s3];
s5 = Map[Polygon, Partition[Transpose[s4], 5]];
Show[Polyhedron[Dodecahedron], Graphics3D[s5]]
```



- Graphics3D -

ή θα μπορούσα να έχω συνδυασμό των παραπάνω δύο περιπτώσεων :

```
s = Dodecahedron[];
s2 = Flatten[s, 1, Polygon];
s3 = Flatten[s2, 1];
s4 = Transpose[Table[{1, 2, 1}, {60}]] + Transpose[s3];
s5 = {{Cos[Pi / 4], 0, Sin[Pi / 4]}, {0, 1, 0}, {-Sin[Pi / 4], 0, Cos[Pi / 4]}}.s4;
s6 = Map[Polygon, Partition[Transpose[s5], 5]];
Show[Polyhedron[Dodecahedron], Graphics3D[s6]]
```



- Graphics3D -

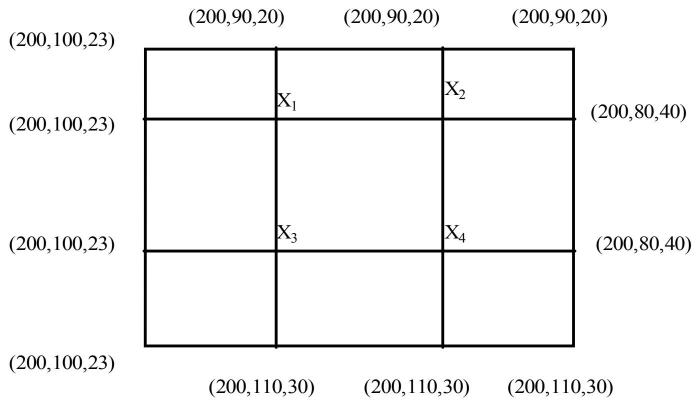
Προσπαθήστε να εφαρμόσετε τον κανόνα

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_i^{'} \\ y_i^{'} \\ z_i^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

για να στρέψετε το αρχικό σχήμα κατά γωνία $\theta = 30^0$ ως προς τον άξονα zz’. ■

5. Πίνακες και γραμμικά συστήματα.

Άσκηση 4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι χρωματισμοί των pixels μιας εικόνας ως τριάδα αριθμών (αριθμοί που αναπαριστούν την ποσότητα του χρώματος σε κόκκινο, πράσινο και μπλέ). Στην προσπάθεια μας να βελτιώσουμε την ανάλυση της εικόνας μπορούμε να προσθέσουμε επιπλέον pixels $X_i, i = 1,2,3,4$ των οποίων η χρωματική τριάδα προκύπτει από την μέση τιμή της χρωματικής τριάδας των 4 γειτονικών pixels. Προσπαθήστε να υπολογίσετε την χρωματική τριάδα των $X_i,\ i = 1,2,3,4$.
Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν καινούριο τύπο δεδομένων που θα περιέχει τις αναλογίες των τριών χρωμάτων (κόκκινο, πράσινο και μπλέ) ενός pixel.



Απάντηση. Η τριάδα χρωμάτων αφορά τα χρώματα (κόκκινο, πράσινο, μπλέ). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποχρώσεις του κόκκινου σε κάθε εσωτερικό σημείο, η οποία είναι ίση με τον μέσο όρο της απόδοσης του κόκκινου των 4 γειτονικών σημείων. Στηριζόμενοι στην παραπάνω ιδιότητα, και προκειμένου να υπολογίσουμε την αναλογία του χρώματος στα σημεία X_1, X_2, X_3, X_4, θα πρέπει να επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων :

$$\left.\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}\left(200+200+x_2+x_3\right) \\ x_2 = \frac{1}{4}\left(x_1+200+200+x_4\right) \\ x_3 = \frac{1}{4}\left(200+x_1+x_4+200\right) \\ x_4 = \frac{1}{4}\left(x_3+x_2+200+200\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \frac{1}{4}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} + \frac{1}{4}\underbrace{\begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ορίζουμε τον πίνακα A,

```
A = (1/4) {{0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}}
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

τον πίνακα B,

```
B = (1/4) {{400}, {400}, {400}, {400}}
```
$$\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

και τον πίνακα X,

```
X = {{x1}, {x2}, {x3}, {x4}}
```
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

και λύνουμε το σύστημα που δηλώσαμε παραπάνω,

```
Solve[X == A.X + B, {x1, x2, x3, x4}]
{{x1 → 200, x2 → 200, x3 → 200, x4 → 200}}
```
ή
```
Solve[X == A.X + B, Flatten[X]]
{{x1 → 200, x2 → 200, x3 → 200, x4 → 200}}
```

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων γίνεται με τον τελεστή «.». Η εντολή Flatten[], διώχνει (ισοπεδώνει) τα επιμέρους άγκιστρα από την λίστα του X π.χ.

```
Flatten[X]
{x1, x2, x3, x4}
```

Προσπάθησε να υπολογίσεις με παρόμοιο τρόπο την αναλογία των υπολοίπων χρωμάτων στα σημεία X_1, X_2, X_3, X_4. Τον ρόλο των χρωματισμών θα μπορούσε κάλλιστα να παίξει η θερμοκρασία σε μια ράβδο, όπου τα άκρα της ράβδου έχουν συγκεκριμένη θερμοκρασία. ■

Παράδειγμα 3. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες A^{-1}, B^{-1} με την βοήθεια της εντολής RowReduce[] αλλά και της συναρτήσεως GaussJordan[] που δημιουργήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Απάντηση. Ορίζουμε τους πίνακες

```
A = {{1, 0, 2}, {2, -1, 3}, {4, 1, 8}}
```
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

```
B = IdentityMatrix[3]
```
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και τον σύνθετο πίνακα [A, B]

```
<< LinearAlgebra`
M = AppendRows[A, B]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις απαραίτητες πράξεις γραμμών με τη συνάρτηση RowReduce[].

```
RowReduce[M]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

που θα μπορούσαμε να τον υπολογίσουμε και με την συνάρτηση Inverse[]

```
Inverse[A]
```

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την συνάρτηση GaussJordan[] που δημιουργήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε :

```
GaussJordan[M]
```

The compound matrix is –> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Change row 2 with row 1–> $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Change row 3 with row 1–> $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(row 1)/(4)–>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(row 2)– (row 1) ∗(1)–>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(row 3)– (row 1) ∗(2)–>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Change row 3 with row 2-> $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(row 2)/$(-\frac{3}{2})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(row 1)− (row 2) $*(\frac{1}{4})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(row 3)− (row 2) $*(-\frac{1}{4})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(row 3)/$(\frac{1}{6})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(row 1)− (row 3) $*(\frac{11}{6})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(row 2)− (row 3) $*(\frac{2}{3})$->

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

■

Κεφάλαιο 4. Ορίζουσες.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Απάντηση. Η συνάρτηση του Mathematica που υπολογίζει την ορίζουσα ενός πίνακα είναι η Det[]. Συνεπώς θα έχουμε :

```
A = {{1, 1, 1}, {a, b, c}, {a^2, b^2, c^2}};
Det[A] // Factor
```

$-(a-b)(a-c)(b-c)$

Το σύμβολο // δηλώνει ότι θα πρέπει να εφαρμόσουμε την συνάρτηση Factor[], που παραγοντοποιεί παραστάσεις, στο αποτέλεσμα της συνάρτησης Det[A]. Ο αντίστροφος του παραπάνω πίνακα θα είναι :

```
Simplify[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{bc}{(a-b)(a-c)} & -\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} & \frac{1}{(a-b)(a-c)} \\ \frac{ac}{-ab+b^2+ac-bc} & \frac{a+c}{(a-b)(b-c)} & \frac{1}{(-a+b)(b-c)} \\ \frac{ab}{(a-c)(b-c)} & -\frac{a+b}{(a-c)(b-c)} & \frac{1}{(a-c)(b-c)} \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση Simplify[] κάνει όλες τις δυνατές απλοποιήσεις στο όρισμα που περιέχει. Όμοια θα έχουμε :

```
A = {{1, 1, 1, 1}, {a, b, c, d}, {a^2, b^2, c^2, d^2}, {a^3, b^3, c^3, d^3}};
Det[A] // Factor
```

$(a-b)(a-c)(b-c)(a-d)(b-d)(c-d)$

Τον πίνακα A επειδή έχει συγκεκριμένη μορφή θα μπορούσα να τον σχηματίσω και με την συνάρτηση Table[] όπως παρακάτω :

```
A = Table[a_i^j, {j, 0, 4}, {i, 1, 5}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{pmatrix}$$

```
Det[A] // Factor
```

$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)(a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5)(a_4-a_5)$

Για κάθε μια τιμή της εξωτερικής μεταβλητής i π.χ. i=1, στην Table[], η εσωτερική μεταβλητή j παίρνει όλες τις τιμές π.χ. j=0,1,2,3,4. Μπορείς να συμπεράνεις ποια είναι η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα ;

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 2. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα :

$$A_n=\begin{pmatrix} 1+a^2 & a & & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 1+a^2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

Απάντηση. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα D_n του παραπάνω πίνακα ως προς την πρώτη γραμμή και παίρνουμε :

$$D_n=\left(1+a^2\right)D_{n-1}-a^2D_{n-2}$$

όπου

$$D_1=\left|1+a^2\right|=1+a^2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{vmatrix}=\left(1+a^2\right)^2-a^2=1+a^2+\left(a^2\right)^2=\frac{1-\left(a^2\right)^3}{1-a^2}$$

Θα πρέπει να λύσουμε συνεπώς την παραπάνω εξίσωση διαφορών με βάση τις αρχικές συνθήκες για n=1,2. Η συνάρτηση RSolve του Mathematica μας δίνει την λύση που ψάχνουμε :

```
RSolve[{d[n] == (1 + a^2) d[n - 1] - a^2 d[n - 2], d[1] == 1 + a^2, d[2] == (1 + a^2)^2 - a^2}, d[n], n]
```

$$\left\{\left\{d[n]\to\frac{-1+\left(a^2\right)^{1+n}}{-1+a^2}\right\}\right\}$$

■

Άσκηση 3. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο συμπληρωματικός πίνακας του Α και η ορίζουσα του.

Απάντηση. Σκοπός του προβλήματος αυτού είναι να δώσει τον τρόπο δημιουργίας του συμπληρωματικού πίνακα. Ο τρόπος επίλυσης προέρχεται από το βιβλίο (Καραμπετάκης, Σταματάκης & Ψωμόπουλος, 2004, σελ.157).

Πρώτα ορίζουμε τον πίνακα,

```
A = {{1, 1, 1}, {2, 3, 4}, {4, 9, 16}};
```

Το πλήθος των γραμμών του πίνακα Α είναι :

```
nr = Length[A]
3
```

όπου η συνάρτηση Length[A] μας δίνει το πλήθος των αντικειμένων που έχει η λίστα A. Παρόμοια βρίσκουμε το πλήθος των στηλών του πίνακα A,

```
nc = Length[First[A]]
3
```

όπου τώρα η συνάρτηση First[A] υπολογίζει το πρώτο αντικείμενο της λίστας A, που είναι η πρώτη γραμμή του πίνακα A. Η συνάρτηση Range[n] δημιουργεί μια λίστα με τους αριθμούς από το 1 έως το n,

```
Range[Length[A]]
{1, 2, 3}
```

ενώ η συνάρτηση Drop[λίστα,{n}] αφαιρεί από την «λίστα» το n στοιχείο

```
Drop[{1, 2, 3}, {2}]
{1, 3}
```

Έτσι αν θέλουμε από τους αριθμούς {1,2,3} που δηλώνουν τους αριθμούς γραμμών του πίνακα A, να αφαιρέσουμε την γραμμή 2, θα πρέπει να γράψουμε :

```
l = Drop[Range[Length[A]], {2}]
{1, 3}
```

Παρόμοια θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε την στήλη 2 από τον πίνακα A ως εξής :

```
s = Drop[Range[Length[First[A]]], {2}]
{1, 3}
```

Χρησιμοποιώντας τις λίστες l,s μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την γραμμή 2 και στήλη 2 από τον πίνακα A,

```
A[[l, s]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δηλώνουμε μια συνάρτηση που υπολογίζει τον υποπίνακα που μένει αν αφαιρέσουμε την i γραμμή και j στήλη από έναν πίνακα A.

```
minorMatrix[A_List, i_Integer /; Positive[i], j_Integer /; Positive[j]] :=
 Module[{l, s},
  l = Drop[Range[Length[A]], {i}];
  s = Drop[Range[Length[First[A]]], {j}];
  A[[l, s]]]
```

Η δήλωση i_Integer/;Positive δηλώνει ότι το i θα πρέπει να είναι ακέραιος και θετικός για να δώσει αποτελέσματα η συνάρτηση. Ο συμβολισμός /; δηλώνει ότι θα πρέπει να ισχύει ο λογικός περιορισμός που ακολουθεί. Αν για παράδειγμα, αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη από τον πίνακα A, θα έχουμε :

```
minorMatrix[A, 1, 1]
```
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Η μορφή των στοιχείων του συμπληρωματικού πίνακα είναι :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, Det\left[\vartheta_{ij} A\right]$$

όπου με τον όρο $\vartheta_{ij} A$ δηλώνουμε τον πίνακα που προκύπτει αν από τον πίνακα A αφαιρέσουμε την γραμμή i και την στήλη j. Η παρακάτω συνάρτηση υπολογίζει τον συμπληρωματικό πίνακα :

```
adjointMatrix[A_List] :=
 Module[{i, j, l},
  If[Length[A] == Length[First[A]], l = Length[A];
   Transpose[Table[(-1)^(i+j) Det[minorMatrix[A, i, j]], {i, 1, l}, {j, 1, l}]]]]
```

Έτσι ο συμπληρωματικός πίνακας του A θα είναι :

```
adjointMatrix[A]
```
$$\begin{pmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα θα είναι :

```
Det[A]
2
```

ενώ ο αντίστροφος πίνακας θα είναι :

```
b = Simplify[(1/Det[A]) * adjointMatrix[A]]
```
$$\begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ας δούμε πως θα δουλέψουν οι συναρτήσεις που ορίσαμε στον πίνακα (Παράδειγμα 2.5, σελ.35, Α’ τόμος) :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
A = {{3, -2, 1}, {5, 6, 2}, {1, 0, -3}};
adjointMatrix[A]
```
$$\begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς ο αντίστροφος θα είναι ο :

```
b = Simplify[(1 / Det[A]) * adjointMatrix[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{47} & \frac{3}{47} & \frac{5}{47} \\ -\frac{17}{94} & \frac{5}{47} & \frac{1}{94} \\ \frac{3}{47} & \frac{1}{47} & -\frac{14}{47} \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ο πίνακας $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m\times n}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

$$AA^\dagger A = A$$
$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$$
$$\left(AA^\dagger\right)^T = AA^\dagger$$
$$\left(A^\dagger A\right)^T = A^\dagger A$$

ονομάζεται γενικευμένος αντίστροφος ή ψευδοαντίστροφος του πίνακα A. Η συνάρτηση PseudoInverse[] υπολογίζει τον ψευδοαντίστροφο ενός πίνακα. Έστω για παράδειγμα ο πίνακας :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

που έχει ορίζουσα 0

```
A = {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 5}};
Det[A]
0
```

έχει τον παρακάτω γενικευμένο αντίστροφο

```
A1 = PseudoInverse[A]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες που αναφέραμε παραπάνω

```
A.A1.A == A
True
A1.A.A1 == A1
True
Transpose[A.A1] == A.A1
True
Transpose[A1.A] == A1.A
True
```

■

Άσκηση 5. Να παραγοντοποιηθεί σε μορφή LU ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

και να λυθεί το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Απάντηση. Πρώτα ορίζουμε τον πίνακα Α,

```
A = {{6, -2, -4, 4}, {3, -3, -6, 1}, {-12, 8, 21, -8}, {-6, 0, -10, 7}};
```

Η συνάρτηση LUDecomposition[] επιστρέφει τρεις τιμές. Από τις τιμές αυτές, η πρώτη είναι ο κάτω τριγωνικός και άνω τριγωνικός πίνακας ενσωματωμένοι σε έναν πίνακα, ενώ ο δεύτερος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού για τον πίνακα του οποίου την LU παραγοντοποίηση ψάχνουμε. Οι πίνακες L,U μπορούν να επιλεχθούν με την συνάρτηση LUMatrices[] που υπάρχει στο πακέτο LinearAlgebra.

```
{lu, p, cn} = LUDecomposition[A]
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ -4 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -2 & 8 \end{pmatrix}, \{2, 1, 3, 4\}, 1\right\}$$

Ο πίνακας lu περιέχει και τον κάτω τριγωνικό πίνακα L και τον άνω τριγωνικό πίνακα U που ψάχνουμε. Μπορούμε να τους επιλέξουμε από τον lu ως εξής :

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
{l, u} = LUMatrices[lu]
```

$$\begin{pmatrix} \{1, 0, 0, 0\} & \{2, 1, 0, 0\} & \{-4, -1, 1, 0\} & \{-2, -\frac{3}{2}, -2, 1\} \\ \{3, -3, -6, 1\} & \{0, 4, 8, 2\} & \{0, 0, 5, -2\} & \{0, 0, 0, 8\} \end{pmatrix}$$

και άρα

```
l
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

και

```
u
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Η σχέση που συνδέει τους πίνακες A,L,U είναι η εξής :

```
l.u == A[[p]]
True
```

όπου A[[p]] είναι ο πίνακας που προέρχεται από τον μετασχηματισμό γραμμών p του πίνακα A που υπολογίσαμε παραπάνω :

```
p
{2, 1, 3, 4}
A[[p]]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & 1 \\ 6 & -2 & -4 & 4 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι έγινε αλλαγή της $1^{ης}$ με την $2^{η}$ γραμμή, ενώ η $3^{η}$ και $4^{η}$ γραμμή έμεινα ίδιες.

Ο πίνακας p έχει αρχική τιμή την {1,2,...,n} δηλ. τον αριθμό γραμμών του πίνακα A, ενώ καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών που γίνονται. Αν θέλουμε τώρα να λύσουμε την AX=B όπου

```
B = {{2}, {-4}, {8}, {-43}};
```

χρησιμοποιούμε την LUBackSubstitution[] που υπολογίζει την λύση της AX=B. Χρησιμοποιείται κυρίως όταν έχουμε μεγάλους αριθμητικούς πίνακες.

```
LUBackSubstitution[LUDecomposition[A], B] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{69}{10} \\ -\frac{6}{5} \\ -4 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δίνουμε ένα πρόγραμμα (με κάποιες αλλαγές) που μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση (http://math.fullerton.edu/mathews/) και το οποίο υπολογίζει την LU παραγοντοποίηση ενός πίνακα A.

```
LUfactor[A_List] :=
  Module[ {B, n, i, j, k, p},
   B = A;
   n = Length[B];
   r = Table[j, {j, n}];
   For[ p = 1, p ≤ n - 1, p++,
    For[ j = p + 1, j ≤ n, j++,
     If[ Abs[B[[r[[j]], p]]] > Abs[B[[r[[p]], p]]],
       r[[{j, p}]] = r[[{p, j}]] ]; ];
    For[ k = p + 1, k ≤ n, k++,
     B[[r[[k]], p]] = B[[r[[k]], p]] / B[[r[[p]], p]];
     For[ c = p + 1, c ≤ n, c++,
      B[[r[[k]], c]] = B[[r[[k]], c]] - B[[r[[k]], p]] B[[r[[p]], c]]; ]; ]; ];
   L = P = IdentityMatrix[n];
   P = P[[r]];
   U = B[[r]];
   For[ i = 1, i ≤ n, i++,
    For[ j = 1, j ≤ i - 1, j++,
      L[[i, j]] = B[[r[[i]], j]];
      U[[i, j]] = 0; ]; ];
   Return[{L, U, r}] ];
```

Το παραπάνω πρόγραμμα επιστρέφει τους πίνακες L, U και τον πίνακα μετάθεσης p.

```
{l, u, p} = LUfactor[A]
```

$$\begin{pmatrix} \{1,0,0,0\} & \left\{\frac{1}{2},1,0,0\right\} & \left\{-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,0\right\} & \left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{6}{7},1\right\} \\ \{-12,8,21,-8\} & \left\{0,-4,-\frac{41}{2},11\right\} & \left\{0,0,\frac{35}{8},-\frac{15}{4}\right\} & \left\{0,0,0,\frac{16}{7}\right\} \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
l.u == A[[p]]
True
```

■

Άσκηση 6. Να βρεθεί η Cholesky παραγοντοποίηση του συμμετρικού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 11 \\ 11 & 14 & 11 \\ 11 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση CholeskyDecomposition[] με όρισμα τον πίνακα A.

```
A = {{14, 11, 11}, {11, 14, 11}, {11, 11, 14}};
U = CholeskyDecomposition[A]
```

$$\begin{pmatrix} \sqrt{14} & \frac{11}{\sqrt{14}} & \frac{11}{\sqrt{14}} \\ 0 & 5\sqrt{\frac{3}{14}} & \frac{11\sqrt{\frac{3}{14}}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{6\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση CholeskyDecomposition[] μας επιστρέφει τον πίνακα U για τον οποίο ισχύει η σχέση $A = U^T U$ όπου U^T ο ανάστροφος του πίνακα U.

```
Transpose[U].U == A
True
```

Σημείωση. Η συνάρτηση CholeskyDecomposition[] δουλεύει αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. Στην περίπτωση μας έχουμε :

```
Positive /@ Eigenvalues[A]
{True, True, True}
```

Παραπάνω εφαρμόζουμε (/@) την συνάρτηση Positive[] (που ελέγχει αν το όρισμα είναι θετικό) στην λίστα με τις ιδιοτιμές του πίνακα A (Eigenvalues[]) και παρατηρούμε από την απάντηση ότι όλες είναι θετικές και συνεπώς και ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.
Μια παραλλαγή ενός προγράμματος που έχει δημιουργήσει ο Καθ. John Mathews και βρίσκεται στην ιστοσελίδα (http://math.fullerton.edu/mathews/) είναι το εξής :

```
choleskyDecomposition[A_List] :=
 Module[{n, B, i, j, k, m, L, U},
  B = A;
  n = Length[B];
  L = Table[0, {n}, {n}];
  U = L;
  For[k = 1, k ≤ n, k++,
   L[[k,k]] = 1;
   For[j = k, j ≤ n, j++,
    U[[k,j]] = B[[k,j]] - Sum[L[[k,m]] U[[m,j]], {m, 1, k-1}] ];
   For[i = k + 1, i ≤ n, i++,
    L[[i,k]] = (B[[i,k]] - Sum[L[[i,m]] U[[m,k]], {m, 1, k-1}]) / U[[k,k]]]];
  Return[{L, U}]]
```

το οποίο δουλεύει για οποιοδήποτε συμμετρικό πίνακα A. Κάνοντας χρήση του παραπάνω προγράμματος στον πίνακα A που έχουμε ορίσει θα έχουμε :

```
A = {{14, 11, 11}, {11, 14, 11}, {11, 11, 14}};
{L, U} = choleskyDecomposition[A];
L
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{14} & 1 & 0 \\ \frac{11}{14} & \frac{11}{25} & 1 \end{pmatrix}$$

U

$$\begin{pmatrix} 14 & 11 & 11 \\ 0 & \frac{75}{14} & \frac{33}{14} \\ 0 & 0 & \frac{108}{25} \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που θελήσουμε να λύσουμε το σύστημα $AX=B$, θα πρέπει :
Βήμα 1. Να δημιουργήσουμε τα L,U όπου $U = DL^T$,
Βήμα 2. Να λύσουμε την $LY = B$ ως προς Y με αντικατάσταση προς τα μπροστά,
Βήμα 3. Να λύσουμε την $UX = Y$ ως προς X με αντικατάσταση προς τα πίσω.

Αν δηλ. ο πίνακας B είναι ο παρακάτω :

```
B = {{1}, {0}, {0}};
```

θα πρέπει να εφαρμόσουμε το βήμα 2 για να υπολογίσουμε το Y,

```
Y = Table[{y_i}, {i, 1, 3}];
Solve[L.Y == B, Flatten[Y]]
```

$$\left\{\left\{y_1 \to 1,\ y_2 \to -\frac{11}{14},\ y_3 \to -\frac{11}{25}\right\}\right\}$$

και στη συνέχεια το βήμα 3 για να υπολογίσουμε το X,

```
X = Table[{x_i}, {i, 1, 3}];
Solve[U.X == Y, Flatten[X]] /. %%
```

(εφαρμόζοντας το προ-προηγούμενο αποτέλεσμα)

$$\left\{\left\{\left\{x_1 \to \frac{25}{108},\ x_2 \to -\frac{11}{108},\ x_3 \to -\frac{11}{108}\right\}\right\}\right\}$$

Τα παραπάνω θα μπορούσαν λυθούν και με την TridiagonalSolve[] που ανήκει στο πακέτο LinearAlgebra. Παρακάτω παραθέτουμε δύο συναρτήσεις, οι οποίες επιλύουν προς τα μπροστά την $LY=B$ (Βήμα 2^o),

```
ForeSub[L_List, B_List] :=
 Module[{n, i, j, Y},
  n = Length[L];
  Y = Table[0, {n}];
  Y[[n]] = B[[n]] / L[[n, n]];
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   Y[[i]] = (B[[i]] - Sum[L[[i, j]] Y[[j]], {j, 1, i-1}]) / L[[i, i]]];
  Return[Y]]

Y = ForeSub[L, B]
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{11}{14} \\ -\frac{11}{25} \end{pmatrix}$$

και την $UX=Y$ (Βήμα 3ο)

```
BackSub[U_List, Y_List] :=
 Module[{n, i, j},
  n = Length[U];
  X = Table[0, {n}];
  X[[n]] = Y[[n]] / U[[n, n]];
  For[i = n - 1, 1 ≤ i, i--,
   X[[i]] = (Y[[i]] - Sum[U[[i, j]] X[[j]], {j, i + 1, n}]) / U[[i, i]]];
  Return[X]]
```

$$X_{[[n]]} = \frac{Y_{[[n]]}}{U_{[[n,n]]}};\qquad X_{[[i]]} = \left(Y_{[[i]]} - \sum_{j=i+1}^{n} U_{[[i,j]]}\,X_{[[j]]}\right) \Big/ U_{[[i,i]]}$$

```
X = BackSub[U, Y]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{25}{108} \\ -\frac{11}{108} \\ -\frac{11}{108} \end{pmatrix}$$

■

Κεφάλαιο 5. $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$

Παράδειγμα. Δίνονται τα διανύσματα

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα 3x-4y,
β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x,y,
γ) Να υπολογίσετε το εξωτερικό γινόμενο των x,y.
δ) Να υπολογίσετε το μικτό γινόμενο των x,y,z.

Απάντηση. Πρώτα ορίζουμε τα διανύσματα x,y,

```
x = {1, 2, 4};
y = {2, 1, -1};
z = {1, 1, 1};
```

Το διάνυσμα 3x-4y δίνεται παρακάτω,

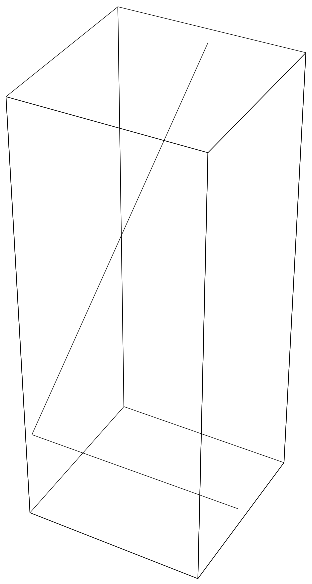
```
3 x + 4 y
{11, 10, 8}
```

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης Dot[],

```
Dot[x, y]
0
```

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι τα διανύσματα x,y είναι κάθετα μεταξύ τους. Διανύσματα στον δισδιάστατο χώρο μπορούμε να τα σχεδιάσουμε με την συνάρτηση Arrow που υπάρχει στο πακέτο Graphics. Επειδή δεν υπάρχει παρόμοια συνάρτηση που να σχεδιάζει στον τρισδιάστατο χώρο, κάνουμε χρήση της συνάρτησης Line[] που ανήκει επίσης στο πακέτο Graphics για να σχεδιάσουμε τα δύο αυτά διανύσματα.

```
<< Graphics`;
z = {0, 0, 0};
p1 = Show[Graphics3D[Line[{z, x}]], DisplayFunction → Identity]
- Graphics3D -
p2 = Show[Graphics3D[Line[{z, y}]], DisplayFunction → Identity]
- Graphics3D -
Show[p1, p2, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



```
- Graphics3D -
```

Η επιλογή DisplayFunction→Identity δίνει την εντολή να μην εμφανισθεί το γραφικό, ενώ η επιλογή DisplayFunction→$DisplayFunction δίνει την δυνατότητα να εμφανισθεί στην οθόνη το γραφικό. Παρατηρούμε ότι αποθηκεύσαμε τα γραφικά ως p1 και p2 και στη συνέχεια τα εμφανίσαμε και τα δύο μαζί με την εντολή Show[]. Η εντολή Line[z,x] εμφανίζει ευθεία με αρχή το σημείο z, και τέλος το σημείο x. Η Graphics3D μας βοηθάει να εμφανίσουμε ένα τρισδιάστατο γραφικό όπως αυτό που μας δίνει η συνάρτηση Line[].
Το εξωτερικό γινόμενο δίνεται από τη συνάρτηση CrossProduct[] που ανήκει στο πακέτο συναρτήσεων VectorAnalysis που με την σειρά του ανήκει στο πακέτο Analysis. Συνεπώς θα έχουμε,

<< Calculus`VectorAnalysis` (κάλεσμα του πακέτου)

```
w = CrossProduct[x, y]
{-6, 9, -3}
```

Στο πακέτο αυτό ανήκει και η συνάρτηση του εσωτερικού γινομένου DotProduct[]

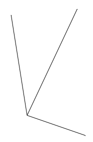
```
DotProduct[x, y]
0
```

Για να πάρουμε την γραφική παράσταση του διανύσματος w θα έχουμε

```
p3 = Show[Graphics3D[Line[{z, w}]], DisplayFunction → Identity];
```

ενώ για την γραφική παράσταση όλων των διανυσμάτων μαζί θα έχουμε,

```
p4 = Show[p1, p2, p3, DisplayFunction → $DisplayFunction, Boxed → False]
```



- Graphics3D -

Παρατηρούμε ότι το εξωτερικό γινόμενο w των δύο διανυσμάτων x,y είναι διάνυσμα κάθετο στον χώρο που ορίζουν τα διανύσματα x,y. Η επιλογή Boxed→False απενεργοποιεί από το γραφικό τους άξονες των συντεταγμένων.

Το μικτό γινόμενο των τριών διανυσμάτων θα το πάρουμε με την συνάρτηση ScalarTripleProduct[] που ανήκει και αυτή στο πακέτο συναρτήσεων VectorAnalysis.

```
ScalarTripleProduct[x, y, z, Cartesian]
```

0

■

Άσκηση 2. Να δημιουργήσετε 4 τυχαία διανύσματα $u_i \in \mathbb{R}^3$ και να βρείτε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απάντηση.

Η συνάρτηση Random[] δημιουργεί έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό στο κλειστό διάστημα [0,1]. Αν θέλουμε έναν τυχαίο ακέραιο αριθμό στο διάστημα [-10,10] θα πρέπει να γράψουμε :

```
Random[Integer, {-10, 10}]
```

-2

Αν τώρα θέλουμε να πάρουμε μια λίστα με 3 τυχαίους ακέραιους αριθμούς θα γράψουμε :

```
Table[Random[Integer, {-10, 10}], {i, 1, 3}]
{-2, -2, -2}
```

Αν πάλι θέλουμε να δημιουργήσουμε 4 τυχαία διανύσματα $u_i \in \mathbb{R}^3$ θα έχουμε :

```
Do[u_j = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {i, 1, 3}], {j, 1, 4}]
```

Η συνάρτηση Do[] δέχεται δύο ορίσματα : α) το πρώτο είναι το κυρίως σώμα του προγράμματος που θέλουμε να επαναλάβουμε, και β) το δεύτερο όρισμα δηλώνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται ο δείκτης επανάληψης. Συνεπώς για j=1, θα εκτελεστεί η εντολή `u_j = Table[Random[Integer, {-10, 10}], {i, 1, 3}]` και θα υπολογιστεί με τον τρόπο αυτό το διάνυσμα u_1, στη συνέχεια το j θα γίνει 2 και θα υπολογιστεί το u_2 κ.ο.κ.. Τα διανύσματα που έχουμε πάρει μπορούν εύκολα να παρουσιαστούν με την εντολή Table[],

```
U = Table[u_j, {j, 1, 4}]
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 9 & -6 & -8 \\ -9 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση RowReduce[] μπορεί να κάνει στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα U ώστε να μας δώσει την τάξη του πίνακα U, και συνεπώς το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων :

```
RowReduce[U]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εφόσον υπάρχει μηδενική γραμμή (4^{η}) τα διανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφόσον η τάξη του πίνακα είναι 3, θα έχουμε 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Την τάξη του πίνακα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και με την συνάρτηση MatrixRank[], όπως παρακάτω :

```
MatrixRank[U]
3
```

Για να βρούμε την σχέση εξάρτησης που υπάρχει μπορούμε να λύσουμε την σχέση $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0$ ως προς τις μεταβλητές $a_i, i = 1,2,3,4$ μέσω της εντολής Reduce.

```
Reduce[Sum[a_i u_i, {i, 1, 4}] == 0, Table[a_i, {i, 1, 4}]]
```

$$a_2 == \frac{323\,a_1}{740} \bigwedge a_3 == -\frac{223\,a_1}{370} \bigwedge a_4 == -\frac{739\,a_1}{740}$$

Η συνάρτηση Sum[], δέχεται δύο ορίσματα : α) τον όρο της ακολουθίας που θέλουμε να προσθέσουμε f(i), και β) τον δείκτη i πως μεταβάλλεται. Η λύση που πήραμε μας δείχνει και τη σχέση εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων π.χ.

$$a_1u_1 + \frac{323}{740}a_1u_2 - \frac{223}{370}a_1u_3 - \frac{739}{740}a_1u_4 = 0 \overset{a_1 \neq 0}{\Rightarrow}$$
$$u_1 = -\frac{323}{740}u_2 + \frac{223}{370}u_3 + \frac{739}{740}u_4$$

■

Άσκηση 3. Να δημιουργήσετε 4 τυχαίους πίνακες $u_w \in \mathbb{R}^{2\times2}, w = 1,2,3,4$ και να βρείτε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Απάντηση.

Πρώτα δημιουργούμε τους 4 τυχαίους πίνακες $u_w \in \mathbb{R}^{2\times2}, w = 1,2,3,4$:

```
Table[u_w = Table[Table[Random[Integer, {-5, 5}], {i, 1, 2}], {j, 1, 2}], {w, 1, 4}]
```

$$\begin{pmatrix} \{1, -4\} & \{3, 5\} \\ \{5, 2\} & \{-3, 4\} \\ \{-4, 0\} & \{3, -2\} \\ \{0, -3\} & \{1, 1\} \end{pmatrix}$$

Ελέγχουμε αν υπάρχουν $a_i, i = 1,2,3,4$ τέτοια ώστε $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0$ για $a_i, i = 1,2,3,4$ όχι κατά ανάγκη όλα μηδέν.

```
Reduce[Sum[aw*uw, {w, 1, 4}] == ZeroMatrix[2, 2], Table[aw, {w, 1, 4}]]
```

$$a_1 == -\frac{5a_5}{9} \bigwedge a_2 == -\frac{a_5}{9} \bigwedge a_3 == \frac{2a_5}{9} \bigwedge a_4 == \frac{5a_5}{3}$$

Συνεπώς οι 4 πίνακες είναι γραμμικά εξαρτημένοι. ■

6. Διανυσματικοί χώροι με Mathematica.

Παράδειγμα 1. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $U = \{(x, y, z) | 3x + 5y + z = 1\}$
2. $V = \{(x, y, z) | 3x^2 + 5y + z = 0\}$
3. $W = \{(x, y, z) | 3x + 5y + z = 0\}$.

Απάντηση.

1. Έστω δύο διανύσματα $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in U, i = 1,2$ δηλαδή $u_i = (x_i, y_i, 1 - 3x_i - 5y_i) \in U, i = 1,2$. Θα πρέπει και το άθροισμα των δύο αυτών διανυσμάτων να ανήκει στον χώρο *U*.

```
u1 = {x1, y1, 1 - 3 x1 - 5 y1};
u2 = {x2, y2, 1 - 3 x2 - 5 y2};
s = u1 + u2;
3 s[[1]] + 5 s[[2]] + s[[3]] == 1 // Simplify
```

False

Παρατηρώ λοιπόν ότι η ιδιότητα $u_1 + u_2 \in U$ δεν ικανοποιείται και συνεπώς ο *U* δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Παρόμοια θα μπορούσαμε να ελέγξουμε και την δεύτερη ιδιότητα π.χ.

```
v1 = {x1, y1, -3 (x1)^2 - 5 y1};
s = k v1;
3 (s[[1]])^2 + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```

$k == 1$

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι θα ισχύει η ιδιότητα $ku_1 \in U, k \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $k = 1$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε το διάνυσμα $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in U$ και $k = 2 \neq 1$ και να δείξουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $ku_1 \in U, k \in \mathbb{R}$ π.χ.

```
u1 = {x1, y1, 1 - 3 x1 - 5 y1};
s = 2 u1;
3 s[[1]] + 5 s[[2]] + s[[3]] == 1 // Simplify
```

False

2. Έστω δύο διανύσματα $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in V, i = 1,2$ δηλαδή $v_i = (x_i, y_i, -3x_i^2 - 5y_i) \in V, i = 1,2$. Θα πρέπει και το άθροισμα των δύο αυτών διανυσμάτων να ανήκει στον χώρο *V*.

```
v1 = {x1, y1, -3 (x1)^2 - 5 y1};
v2 = {x2, y2, -3 (x2)^2 - 5 y2};
s = v1 + v2;
3 (s[[1]])^2 + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```

$x_1 x_2 == 0$

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι θα ισχύει η ιδιότητα $v_1 + v_2 \in V$ αν και μόνο αν $x_1 x_2 = 0$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε δύο διανύσματα $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in V$ με $x_1 x_2 = 1 \times 1 \neq 0$ και να δείξουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $v_1 + v_2 \in V$ π.χ.

```
v1 = {1, 1, -8};
v2 = {1, 0, -3};
s = v1 + v2;
3 (s[[1]])^2 + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```
False

Παρόμοια θα μπορούσαμε να ελέγξουμε και την δεύτερη ιδιότητα π.χ.

```
v1 = {x1, y1, -3 (x1)^2 - 5 y1};
s = k v1;
3 (s[[1]])^2 + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```
$(k-1)\, k\, x_1 == 0$

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι θα ισχύει η ιδιότητα $kv_1 \in V, k \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $(k-1)kx_1 = 0$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε το διάνυσμα $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in V$ με $x_1 = 1 \neq 0$ και $k = 2 \notin \{0,1\}$ και να δείξουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $kv_1 \in V, k \in \mathbb{R}$ π.χ.

```
v1 = {1, 0, -3};
s = 2 v1;
3 (s[[1]])^2 + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```
False

3. Έστω δύο διανύσματα $w_i = (x_i, y_i, z_i) \in W, i = 1,2$ δηλαδή $w_i = (x_i, y_i, -3x_i - 5y_i) \in W, i = 1,2$. Θα πρέπει και το άθροισμα των δύο αυτών διανυσμάτων να ανήκει στον χώρο *W*.

```
w1 = {x1, y1, -3 x1 - 5 y1};
w2 = {x2, y2, -3 x2 - 5 y2};
s = w1 + w2;
3 s[[1]] + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```
True

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι ισχύει η ιδιότητα $w_1 + w_2 \in W$.
Παρόμοια μπορούμε να ελέγξουμε και την δεύτερη ιδιότητα π.χ.

```
w1 = {x1, y1, -3 x1 - 5 y1};
s = k w1;
3 s[[1]] + 5 s[[2]] + s[[3]] == 0 // Simplify
```
True

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι ισχύει και η δεύτερη ιδιότητα $kw_1 \in W, k \in \mathbb{R}$ και συνεπώς ο χώρος W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 2. Εξετάστε αν το σύνολο των πινάκων

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}[\mathbb{R}], a = 2c+1 \right\}$$

αποτελεί υπόχωρο του συνόλου των 2x3 πινάκων.

Απάντηση. Έστω δύο στοιχεία του παραπάνω συνόλου :

$$u_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ d_i & e_i & f_i \end{bmatrix} \in U, a_i = 2c_i + 1, i = 1,2$$

ή ισοδύναμα

$$u_i = \begin{bmatrix} 2c_i + 1 & b_i & c_i \\ d_i & e_i & f_i \end{bmatrix} \in U, i = 1,2$$

Θα πρέπει και το άθροισμα των δύο αυτών διανυσμάτων να ανήκει στο ίδιο σύνολο πινάκων $u_1 + u_2 \in U$ π.χ

```
u1 = {{2 c1 + 1, b1, c1}, {d1, e1, f1}};
u2 = {{2 c2 + 1, b2, c2}, {d2, e2, f2}};
s = u1 + u2;
s[[1, 1]] == 2 s[[1, 3]] + 1 // Simplify
False
```

Παρατηρούμε λοιπόν από παραπάνω ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $u_1 + u_2 \in U$ και συνεπώς ο U δεν αποτελεί υπόχωρο του $M_{2\times 3}[\mathbb{R}]$. Παρατηρήστε επίσης ότι ο μηδενικός πίνακας δεν ανήκει στον *U*.

Παράδειγμα 3. Αν

$$D_1 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, D_2 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

βρείτε βάσεις των υποχώρων $D_1, D_2, D_1 + D_2, D_1 \cap D_2$.

Απάντηση. Σχηματίζουμε έναν πίνακα με στήλες τα διανύσματα του D_1 και ελέγχουμε την τάξη του προκειμένου να υπολογίσουμε την διάσταση του χώρου D_1.

```
D1 = {
   {1, 0, 1},
   {2, -1, 0},
   {1, 1, 1},
   {1, 0, 2},
   {0, 1, -1}};
MatrixRank[D1]
```
3

Άρα η διάσταση του χώρου D_1 είναι 3. Παρόμοια ελέγχουμε την διάσταση του χώρου D_2.

```
D2 = {
   {1, 1, 0},
   {2, 0, -2},
   {1, 1, 2},
   {0, 3, -1},
   {0, -1, 2}};
MatrixRank[D2]
```
3

Άρα η διάσταση του χώρου D_2 είναι 3. Συνεπώς οι χώροι D_1, D_2 έχουν ως βάση τους αντίστοιχου γεννήτορες των χώρων. Για να ελέγξουμε την διάσταση του χώρου $D_1 + D_2$ σχηματίζουμε έναν πίνακα D με τις στήλες των D_1, D_2 μιας και γεννήτορες του D είναι τα διανύσματα που παράγουν τους χώρους D_1, D_2 π.χ.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
DD = AppendRows[D1, D2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση AppendRows[] έχει ως στόχο την ένωση των δύο πινάκων και ανήκει στο πακέτο συναρτήσεων <<LinearAlgebra`MatrixManipulation` (αν ήθελα να τοποθετήσω τον έναν πίνακα κάτω από τον άλλο θα χρησιμοποιούσα την εντολή AppendColumns[]). Στη συνέχεια ελέγχουμε την διάσταση του χώρου:

```
MatrixRank[DD]
```
4

Άρα η διάσταση του χώρου $D_1 + D_2$ είναι 4, και συνεπώς είναι αρκετό να βρω 4 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα από τα παραπάνω 6 διανύσματα που παράγουν τους χώρους D_1, D_2. Πράγματι αν επιλέξω τις 4 πρώτες στήλες του πίνακα DD θα έχω :

```
MatrixRank[TakeColumns[DD, 4]]
```
4

Συνεπώς οι 4 πρώτες στήλες του πίνακα DD αποτελούν μια βάση του χώρου D_1+D_2. Από το θεώρημα της διάστασης θα έχουμε :

$$\dim\left(E_1+E_2\right)=\dim E_1+\dim E_2-\dim\left(E_1\cap E_2\right)\Rightarrow$$

$$\dim\left(E_1\cap E_2\right)=\dim E_1+\dim E_2-\dim\left(E_1+E_2\right)=3+3-4=2$$

και συνεπώς ψάχνουμε για βάση με δύο διανύσματα. Αν $u=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}\in D_1\cap D_2$ τότε

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+l_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+m_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\1&1&1\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\l_1\\m_1\end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\\-1\end{pmatrix}+m_2\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&-2\\1&1&2\\0&3&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2\\l_2\\m_2\end{pmatrix}$$

```
Solve[{
  {{a}, {b}, {c}, {d}, {e}} == D1.{{k1}, {l1}, {m1}},
  {{a}, {b}, {c}, {d}, {e}} == D2.{{k2}, {l2}, {m2}},
  D1.{{k1}, {l1}, {m1}} == D2.{{k2}, {l2}, {m2}}
 },
 {a, b, c, d, e}]
```
$\{\{a\to 2m_1-m_2,\ b\to 2(m_1-2m_2),\ c\to 2m_1+m_2,\ d\to 3m_1-m_2,\ e\to 2m_2-m_1\}\}$

Συνεπώς τα διανύσματα που ανήκουν στην τομή των δύο συνόλων $D_1\cap D_2$ θα έχουν την μορφή :

$$u=\begin{pmatrix}2m_1-m_2\\2m_1-4m_2\\2m_1+m_2\\3m_1-m_2\\-m_1+m_2\end{pmatrix}=m_1\begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\\-1\end{pmatrix}+m_2\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\in D_1\cap D_2$$

και άρα τα διανύσματα :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του $D_1 \cap D_2$.

Παράδειγμα 4. Για τα διανύσματα $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ δείξτε ότι ο τύπος

$$a \bullet b = a_1 b_1 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2$$

Ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο. Ποιο είναι το μήκος του $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Απάντηση.
Πρώτα ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως συνάρτηση :

```
f[{a1_, a2_}, {b1_, b2_}] := a1 b1 - 2 a1 b2 - 2 a2 b1 + 5 a2 b2
```

και στη συνέχεια ελέγχουμε τις 4 ιδιότητες :

1. $x \bullet y = y \bullet x$

```
f[{a1, a2}, {b1, b2}] == f[{b1, b2}, {a1, a2}] // Simplify
True
```

2. $(kx + ly) \bullet z = k(x \bullet z) + l(y \bullet z)$

```
f[k {a1, a2} + l {b1, b2}, {c1, c2}] == k f[{a1, a2}, {c1, c2}] + l f[{b1, b2}, {c1, c2}] // Simplify
True
```

3. $x \bullet x \geq 0$

```
<< Algebra`
InequalitySolve[f[{a1, a2}, {a1, a2}] ≥ 0, {a1, a2}]
True
```

4. $x \bullet x = 0 \Rightarrow x = 0$

```
Reduce[f[{a1, a2}, {a1, a2}] == 0, {a1, a2}, Reals]
a1 == 0 ∧ a2 == 0
```

Συνεπώς ικανοποιούνται οι 4 ιδιότητες που αποδεικνύουν ότι ο τύπος

$$a \bullet b = a_1 b_1 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}^2$. Το μήκος του $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι :

```
Sqrt[f[{1, 2}, {1, 2}]]
```

$\sqrt{13}$

7. Βάση και Διάσταση

Παράδειγμα 1. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u=(1,1,1), v=(2,1,1), w=(1,a,2)$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $(0,1,1)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $u,v,w.$

Απάντηση.

1. Για να είναι τα διανύσματα u,v,w γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει ο πίνακας με στήλες/γραμμές τα διανύσματα αυτά να έχει ορίζουσα διάφορη του μηδέν.

```
A={{1,1,1},{2,1,1},{1,a,2}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

```
Det[A]
```

$a-2$

Είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι για a=2 τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

```
Solve[Det[A] == 0, a]
```

$\{\{a \to 2\}\}$

2. Θα πρέπει να υπάρχουν k,l,m τέτοιοι ώστε (0,1,1)=ku+lv+mw δηλ.

```
u = {{1, 1, 1}};
v = {{2, 1, 1}};
w = {{1, a, 2}};
Reduce[{{0, 1, 1}} == ku + lv + mw, {k, l, m}]
```

$$a == 2 \bigwedge l == \frac{1}{3}(-k-1) \bigwedge m == \frac{2-k}{3} \bigvee a-2 \neq 0 \wedge k == 2 \wedge l == -1 \wedge m == 0$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για $a \neq 2$ το διάνυσμα (0,1,1) γράφεται ως μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των u,v,w λόγω του ότι τα u,v,w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ στην περίπτωση που $a=2$ τότε το (0,1,1) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των u,v,w με παραπάνω από έναν τρόπους. Συμεπραίνουμε λοιπόν ότι για όλες τις τιμές του a το διάνυσμα (0,1,1) ανήκει στον χώρο που παράγουν τα u,v,w.

Παράδειγμα 2. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(3,1,2,0),(0,0,1,1)$.

i) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V.

ii) Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα που είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V.

Απάντηση.

i) Αν ορίσουμε έναν πίνακα A με γραμμές/στήλες τα παραπάνω διανύσματα θα έχουμε

```
A = {{1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}, {3, 1, 2, 0}, {0, 0, 1, 1}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει τάξη

```
MatrixRank[A]
```

3

και συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς υπάρχει μια σχέση εξάρτησης της μορφής $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0$ με όχι όλα τα a_i μηδέν δηλ.

```
u1 = {{1, 1, 0, 0}};
u2 = {{1, 0, 1, 0}};
u3 = {{3, 1, 2, 0}};
u4 = {{0, 0, 1, 1}};
Solve[a1 u1 + a2 u2 + a3 u3 + a4 u4 == 0, {a1, a2, a3, a4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…

$\{\{a_1 \to -a_3, a_2 \to -2a_3, a_4 \to 0\}\}$

Συνεπώς έχουμε

$$-a_3u_1 - 2a_3u_2 + a_3u_3 + 0u_4 = 0 \Rightarrow -u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = -2u_2 + u_3$$

και άρα τα διανύσματα u_2, u_3, u_4 παράγουν τον χώρο (εφόσον rank(A)=3). Στην παραπάνω σχέση θα κατέληγα και αν υπολόγιζα τον δεξιά μηδενικό χώρο του ανάστροφου του πίνακα A δηλ.

```
NullSpace[Transpose[A]]
```

$(-1 \quad -2 \quad 1 \quad 0)$

εφόσον

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow u_1 \rightarrow \\ \leftarrow u_2 \rightarrow \\ \leftarrow u_3 \rightarrow \\ \leftarrow u_4 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Η εντολή NullSpace[B] υπολογίζει πάντα τον δεξιά μηδενικό χώρο του πίνακα B.

ii) Έστω $v = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε θα πρέπει $v \bullet u_1 = 0 \,\&\, v \bullet u_2 = 0 \,\&\, v \bullet u_3 = 0 \,\&\, v \bullet u_4 = 0$ δηλ.

```
v = {a, b, c, d};
u1 = {1, 1, 0, 0};
u2 = {1, 0, 1, 0};
u3 = {3, 1, 2, 0};
u4 = {0, 0, 1, 1};
Reduce[{
  Dot[v, u1] == 0,
  Dot[v, u2] == 0,
  Dot[v, u3] == 0,
  Dot[v, u4] == 0},
 {a, b, c, d}]
```

$b == -a \wedge c == -a \wedge d == a$

Άρα το διάνυσμα που ψάχνουμε είναι της μορφής $\begin{pmatrix} a & -a & -a & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 3. Να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση του χώρου που ορίζουν τα διανύσματα $\eta_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$, $\eta_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$, $\eta_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$.

Απάντηση. Καλούμε το πακέτο <<LinearAlgebra`Orthogonalization`

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

Και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την συνάρτηση GramSchmidt[] στα διανύσματα που μας έδωσαν :

```
u1 = {1, 1, 1, 1};
u2 = {0, 1, 1, 1};
u3 = {0, 0, 1, 1};
GramSchmidt[{u1, u2, u3}]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας με 1^{η} γραμμή τη $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Απάντηση. Έστω u=(1,0) ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα του διανύσματος που προκύπτει από την 1^{η} γραμμή. Τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση μπορώ να υπολογίσω μια ορθοκανονική βάση ως εξής :

```
u1 = {1/√5, 2/√5};
u2 = {1, 0};
GramSchmidt[{u1, u2}]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι ορθοκανονικός.

Παράδειγμα 5. Να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση του χώρου που ορίζουν τα διανύσματα $\{1, x, x^2\}$ αν ορίσουμε ως εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των πολυωνύμων $R_2[x]$ το $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$.

Απάντηση. Κάνοντας χρήση της μεθόδου Gram-Schmidt για την μη ορθοκανονική βάση $\{1, x, x^2\}$ θα έχουμε

```
p1[x_] := 1;
p2[x_] := x - (∫_0^1 x p1[x] dx)/(∫_0^1 p1[x]^2 dx) p1[x];
p3[x_] := x^2 - (∫_0^1 x^2 p1[x] dx)/(∫_0^1 p1[x]^2 dx) p1[x] - (∫_0^1 x^2 p2[x] dx)/(∫_0^1 p2[x]^2 dx) p2[x];
p1[x]/(∫_0^1 p1[x]^2 dx)
p2[x]/(∫_0^1 p2[x]^2 dx)
p3[x]/(∫_0^1 p3[x]^2 dx)
```

1

$12\left(-\frac{1}{2} + x\right)$

$180\left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)$

Παράδειγμα 6. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.

Απάντηση. Για να είναι τα διανύσματα $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ του $\mathbb{R}_3[x]$ γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει η σχέση $a \times 1 + b \times (x-1) + c \times (x-1)^2 + d \times (x-1)^3 = 0$ να έχει ως λύση την $a = b = c = d = 0$. Πράγματι η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε x και συνεπώς και για x=0, x=1, x=2 και x=3 δηλ.

```
p[x_] := a 1 + b (x - 1) + c (x - 1)^2 + d (x - 1)^3;
Solve[{p[0] == 0, p[1] == 0, p[2] == 0, p[3] == 0}, {a, b, c, d}]
```

```
{{a → 0, b → 0, c → 0, d → 0}}
```

που αποδεικνύει αυτό που ψάχνουμε.

8. Γραμμικές Απεικονίσεις.

Παράδειγμα 1. Ελέγξτε αν οι απεικονίσεις

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , x \mapsto x^2$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 , x \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ 3y \\ y-x \end{pmatrix}$$

$$z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,\ z(x,y) = (2x+y,\ x+2y)$$

είναι γραμμικές.

Απάντηση. Θα πρέπει να ισχύει η ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ή ισοδύναμα $f(x+y) - (f(x) + f(y)) = 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν το $f(x+y) - (f(x) + f(y))$

```
f[x_] := x^2;
Simplify[f[x + y] - (f[x] + f[y])]
2 x y
```

και διαπιστώνουμε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι ίσο με μηδέν και συνεπώς η συνάρτηση δεν είναι γραμμική. Παρόμοια διαπιστώνουμε ότι

```
g[x_] := {x + 1, x};
Simplify[g[x + y] - (g[x] + g[y])]
{-1, 0}
```

και συνεπώς και η απεικόνιση g δεν είναι γραμμική. Όμοια και για την τελευταία απεικόνιση

```
h[x_, y_] := {x + 1, 3 y, y - x};
Simplify[h[x1 + y1, x2 + y2] - (h[x1, x2] + h[y1, y2])]
{-1, 0, 0}
```

Η παραπάνω σχέση δεν είναι μηδέν για κάθε ζεύγος (x, y) και συνεπώς η h δεν είναι γραμμική. Τέλος για την απεικόνιση z έχουμε ότι :

```
z[x_, y_] := {2 x + y, x + 2 y};
Simplify[z[x1 + y1, x2 + y2] - (z[x1, x2] + z[y1, y2])]
Simplify[z[l x, l y] - l z[x, y]]
{0, 0}
{0, 0}
```

και άρα η z είναι γραμμική απεικόνιση. Μάλιστα η γραμμική απεικόνιση z είναι και ***1-1*** εφόσον :

```
z[x1, x2] - z[y1, y2]
{2 x1 + x2 - 2 y1 - y2, x1 + 2 x2 - y1 - 2 y2}
Solve[{2 x1 + x2 - 2 y1 - y2 == 0, x1 + 2 x2 - y1 - 2 y2 == 0}, {x1, x2}]
{{x1 → y1, x2 → y2}}
```

αλλά και ***επί*** εφόσον

```
z[x1, x2] - {y1, y2}
{2 x1 + x2 - y1, x1 + 2 x2 - y2}
Solve[{2 x1 + x2 - y1 == 0, x1 + 2 x2 - y2 == 0}, {x1, x2}]
```

$\{\{x1 \to -\frac{1}{3}(-2\,y1 + y2),\ x2 \to -\frac{1}{3}(y1 - 2\,y2)\}\}$

Από τα παραπάνω η αντίστροφη απεικόνιση θα είναι η παρακάτω :

$$z^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ z^{-1}(x, y) = \left(-\frac{1}{3}(-2x + y),\ -\frac{1}{3}(x - 2y)\right)$$

```
z[{x_, y_}] := {2 x + y, x + 2 y};
z1[{x_, y_}] := {-1/3 (-2 x + y), -1/3 (x - 2 y)};
Simplify[z[z1[x, y]]]
Simplify[z1[z[x, y]]]
{x, y}
{x, y}
```

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z)$

που ορίζεται ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f.
2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του πυρήνα της *f*.
3. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση της εικόνας της *f*.

Απάντηση.

1. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

```
f[{{x_}, {y_}, {z_}}] := {{x + 2 y - z}, {y + z}, {x + y - 2 z}};
f[{{1}, {0}, {0}}]
f[{{0}, {1}, {0}}]
f[{{0}, {0}, {1}}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

και άρα ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f έχει ως στήλες τις παραπάνω τιμές

```
A = Transpose[{f[{1, 0, 0}], f[{0, 1, 0}], f[{0, 0, 1}]}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Πράγματι έχουμε

```
A.{{x}, {y}, {z}}
```

$$\begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$$

που ταυτίζεται με την τιμή της απεικόνισης $f(x,y,z)$.

2. Για να υπολογίσουμε τον πυρήνα της απεικόνισης $f(x,y,z)$ θα πρέπει να λύσουμε την $f(x,y,z)=0$.

```
Solve[f[{{x}, {y}, {z}}] == 0, {x, y, z}]
```

$\{\{x \to 3z,\ y \to -z\}\}$

και συνεπώς ο πυρήνας της απεικόνισης είναι :

$$Ker(f)=\left\{x : x=\begin{pmatrix}3z & -z & z\end{pmatrix}^T = z\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T\right\}$$

Το διάνυσμα $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$ είναι βάση του πυρήνα της f και $\dim Ker(f)=1$. Την βάση του πυρήνα της f θα μπορούσαμε να την βρούμε και από τον δεξιά μηδενικό χώρο του πίνακα A π.χ.

```
NullSpace[A]
```

$\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix}$

3. Η τάξη του πίνακα A είναι 2 και συνεπώς και η διάσταση του $f\left(\mathbb{R}^3\right)$.

```
MatrixRank[A]
```

2

Οι γεννήτορες του $f\left(\mathbb{R}^3\right)$ είναι τα διανύσματα $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ που εύκολα μπορούμε να δούμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα :

```
Reduce[a f[{{1}, {0}, {0}}] + b f[{{0}, {1}, {0}}] + c f[{{0}, {0}, {1}}] == 0, {a, b, c}]
```

$b == -\frac{a}{3} \bigwedge c == \frac{a}{3}$

ή ισοδύναμα

$$af(e_1)-\frac{a}{3}f(e_2)+\frac{a}{3}f(e_3)=0 \Rightarrow f(e_1)=\frac{1}{3}f(e_2)-\frac{1}{3}f(e_3)$$

και άρα τα διανύσματα $f(e_2), f(e_3)$ παράγουν τον χώρο $f\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Παράδειγμα 3. Έστω

$$u_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, u_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

επειδή η ορίζουσά τους είναι διάφορη του μηδενός τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Δίνεται η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

τέτοια ώστε

$$f(u_1)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T, f(u_2)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T, f(u_3)=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^T$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Απάντηση. Αν $X=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T$ οι συντεταγμένες ενός διανύσματος X ως προς την συνήθη βάση, τότε θα αναζητήσουμε τους μοναδικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c έτσι ώστε

$$X = au_1 + bu_2 + cu_3$$

Δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
u1 = {{1}, {1}, {0}};
u2 = {{1}, {0}, {1}};
u3 = {{0}, {1}, {1}};
Solve[{{x}, {y}, {z}} == a u1 + b u2 + c u3, {a, b, c}]
```

$$\left\{\left\{a \to -\frac{1}{2}(-x-y+z),\ b \to -\frac{1}{2}(-x+y-z),\ c \to -\frac{1}{2}(x-y-z)\right\}\right\}$$

Στη συνέχεια δίνουμε στην συνάρτηση μας f τις ιδιότητες που έχει, δηλαδή ότι είναι γραμμική :

```
f[x_ + y_] := f[x] + f[y]
f[a_ x_] := a f[x]
```

Καθώς και ότι έχει συγκεκριμένες εικόνες για κάποια x δηλ.

```
f[u1] := {{1}, {2}};
f[u2] := {{0}, {0}};
f[u3] := {{2}, {1}};
```

Στη συνέχεια εφόσον ορίσουμε τις τιμές των a,b,c που βρήκαμε προηγουμένως, ζητάμε από το Mathematica να μας δώσει τον τύπο της f κάνοντας χρήση των κανόνων γραμμικότητας που του δώσαμε δηλ.

```
a = -1/2 (-x - y + z);
b = -1/2 (-x + y - z);
c = -1/2 (x - y - z);
f[a u1 + b u2 + c u3] // Simplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-x+3y+z) \\ \frac{1}{2}(x+3y-z) \end{pmatrix}$$

Το Mathematica διαπιστώνουμε ότι έχει την δυνατότητα του κανονοκεντρικού προγραμματισμού. Με τον όρο «κανονοκεντρικό προγραμματισμό» ή rule-based programming, εννοούμε τον προγραμματισμό ο οποίος στηρίζεται στην συλλογή διαφορετικών ορισμών (ένας ή και περισσότεροι ορισμοί) που αφορούν την ίδια συνάρτηση. Ο κάθε ορισμός μπορεί να αναφέρεται σε διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρουν τα ορίσματα της συνάρτησης. Ο κανονοκεντρικός προγραμματισμός στηρίζεται σε δύο έννοιες : τον «κανόνα» ή rule, και το «πρότυπο» ή pattern. Με τον όρο «κανόνα» ή rule, εννοούμε την διαδικασία αντιστοίχησης των διαφόρων μορφών που μπορεί να έχουν τα ορίσματα της συνάρτησης, σε συγκεκριμένες τιμές. Η δε μορφή που μπορεί να έχει το όρισμα της συνάρτησης, ονομάζεται πρότυπο ή pattern.

9. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Απάντηση

Παρακάτω χρησιμοποιούμε το υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας *Mathematica* για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*.

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}

Out[1]= {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα.

```
In[2]:= p = Det[s * IdentityMatrix[3] - a]

Out[2]= -32 + 36 s - 12 s^2 + s^3
```

Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

```
In[3]:= Solve[p == 0, s]

Out[3]= {{s → 2}, {s → 2}, {s → 8}}
```

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A θα μπορούσε να υπολογιστεί και με την συνάρτηση CharacteristicPolynomial.

```
In[4]:= CharacteristicPolynomial[a, s]

Out[4]= 32 - 36 s + 12 s^2 - s^3
```

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A θα μπορούσαν να υπολογιστούν επίσης με την συνάρτηση Eigenvalues.

```
In[5]:= Eigenvalues[a]

Out[5]= {8, 2, 2}
```

Υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 2.

```
In[6]:= NullSpace[a - 2 * IdentityMatrix[3]]

Out[6]= {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 8.

```
In[7]:= NullSpace[a - 8 * IdentityMatrix[3]]

Out[7]= {{1, 1, 1}}
```

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A θα μπορούσαν να υπολογισθούν με την συνάρτηση Eigenvectors.

```
In[8]:= Eigenvectors[a]

Out[8]= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

Παρατηρούμε ότι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή που μας έδωσε η συνάρτηση Eigenvalues, ενώ τα υπόλοιπα δύο αντιστοιχούν στην δεύτερη-τρίτη ιδιοτιμή που επέστρεψε η συνάρτηση Eigenvalues. Θα μπορούσαμε επίσης να πάρουμε και τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μας με την συνάρτηση Eigensystem που μας δίνει τα ιδιοποσά του συστήματος.

```
In[9]:= Eigensystem[a]

Out[9]= {{8, 2, 2}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

Η παραπάνω συνάρτηση επιστρέφει μια λίστα με στοιχεία 2 λίστες. Η πρώτη περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ενώ η δεύτερη τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές της πρώτης λίστας.

Παράδειγμα

Προσπαθήστε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A^{2004} - A^{2003} + A^{2002}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_2[\mathbb{R}]$$

Απάντηση.

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{3, 1}, {0, 3}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Υπολογισμός του αθροίσματος $A^{2004} - A^{2003} + A^{2002}$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης MatrixPower[πίνακας, δύναμη] που υπολογίζει την «δύναμη» ενός «πίνακα» καθώς και της συνάρτησης FactorInteger[ακέραιος] που παραγοντοποιεί έναν «ακέραιο» αριθμό.

```
In[2]:= MatrixPower[a, 2004] - MatrixPower[a, 2003] + MatrixPower[a, 2002] // FactorInteger
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2002 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2001 \\ 14029 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2002 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Άρα το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 7^1 \times 3^{2002} & 14029^1 \times 3^{2001} \\ 0^1 & 7^1 \times 3^{2002} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -2 & -5\end{bmatrix}\in M_2[\mathbb{R}]$$

να υπολογιστεί ο πίνακας e^A .

Σημείωση. *Ο πίνακας* e^A *ορίζεται ως εξής :*

$$e^A=I+\frac{1}{1!}A^1+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots$$

Απάντηση

Ορισμός του πίνακα A

```
In[1]:= a = {{5, 8}, {-2, -5}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}5 & 8\\ -2 & -5\end{pmatrix}$

Υπολογισμός του πίνακα e^A

```
In[2]:= MatrixExp[a]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix}\frac{-1+4e^6}{3e^3} & \frac{4(-1+e^6)}{3e^3}\\ \frac{1-e^6}{3e^3} & \frac{4-e^6}{3e^3}\end{pmatrix}$

Παράδειγμα. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in M_2[\mathbb{R}]$$

Να υπολογίσετε την ν-οστή δύναμη του πίνακα A.

Απάντηση

```
In[1]:= MatrixPower[{{1, 2}, {2, 1}}, n]
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}\frac{(-1)^n}{2}+\frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{3^n}{2}\\ -\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{3^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{3^n}{2}\end{pmatrix}$

Παράδειγμα. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\in M_3[\mathbb{R}]$$

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα A.

Απάντηση

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

In[2]:= **Inverse[a]**

Out[2]= $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

Απάντηση.

Ο πίνακας A μπορεί να οριστεί στο Mathematica ως

```
a = {{s - 2, -1, 0}, {0, s - 2, 0}, {0, 0, s - 2}}
{{-2 + s, -1, 0}, {0, -2 + s, 0}, {0, 0, -2 + s}}
```

Στη συνέχεια μέσω της συνάρτησης Minors[a,2] μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ορίζουσες τάξης 2 του πίνακα A, και μέσω της Flatten να πάρουμε τις ορίζουσες αυτές ως μια λίστα

```
Minors[a, 2] // Flatten
{4 - 4 s + s^2, 0, 0, 0, 4 - 4 s + s^2, 2 - s, 0, 0, 4 - 4 s + s^2}
```

Εφαρμόζοντας (Apply) την συνάρτηση PolynomialGCD, που υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη πολυωνύμων, στην παραπάνω λίστα (%) θα πάρουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων της παραπάνω λίστας

```
q2 = Apply[PolynomialGCD, %]
-2 + s
```

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι

```
Det[a] / q2 // Simplify
(-2 + s)^2
```

■

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Απάντηση

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = -1, V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 0, V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2 = 0$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα A

```
In[1]:= a = {{-2, -1, 0}, {0, 1, 1}, {-2, -2, -1}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A

```
In[2]:= Eigensystem[a]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \{1, -1, 2\} & \{0, 0, 0\} & \{1, -2, 2\} \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = 2, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_2 = 3, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα B

```
In[1]:= b = {{2, 1, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 3}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B

```
In[2]:= Eigensystem[b]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ \{0, 0, 1\} & \{1, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \left\{ \left\{ \lambda_1 = -\sqrt{5}, V_{-\sqrt{5}} = \left\langle \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda_1 = \sqrt{5}, V_{\sqrt{5}} = \left\langle \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \right\}$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -\sqrt{5}$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, ενώ η $\lambda_2 = \sqrt{5}$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Ορίζουμε τον πίνακα C

```
In[1]:= c = {{2, 1}, {1, -2}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα C

```
In[2]:= Eigensystem[c]
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \{2-\sqrt{5}, 1\} & \{2+\sqrt{5}, 1\} \end{pmatrix}$

■

10. Διαγωνοποίηση.

Παράδειγμα

Μια χώρα διαιρείται σε 3 γεωγραφικές περιοχές. Σύμφωνα με στατιστικές κάθε χρόνο το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3. Από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3. Τέλος από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2. Τι ποσοστό του πληθυσμού κατοικεί στην κάθε περιοχή μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ;

Απάντηση

Έστω $x_k(i)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή k στο τέλος του χρόνου i, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στην χώρα i να είναι στην χώρα j στην επόμενη χρονική παρατήρηση.

Εφόσον το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 10% μετακινείται), άρα το 90% της περιοχής 1 παραμένει στην περιοχή 1. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 1 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_1(i) = \frac{90}{100}x_1(i-1) + \frac{15}{100}x_2(i-1) + \frac{10}{100}x_3(i-1)$$

Εφόσον το 15% της περιοχής 2 μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 25% μετακινείται), άρα το 75% της περιοχής 2 παραμένει στην περιοχή 2. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 2 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 5% μετακινείται στην περιοχή 2. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 2 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_2(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{75}{100}x_2(i-1) + \frac{5}{100}x_3(i-1)$$

Εφόσον το 10% της περιοχής 3 μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2, (δηλαδή συνολικά 15% μετακινείται), άρα το 85% της περιοχής 3 παραμένει στην περιοχή 3. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 3 και από τους κατοίκους της περιοχής 2, 10% μετακινείται στην περιοχή 3. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 3 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_3(i)=\frac{5}{100}x_1(i-1)+\frac{10}{100}x_2(i-1)+\frac{85}{100}x_3(i-1)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(i)\\x_2(i)\\x_3(i)\end{bmatrix}}_{x_i}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{15}{100}&\frac{10}{100}\\\frac{5}{100}&\frac{75}{100}&\frac{5}{100}\\\frac{5}{100}&\frac{10}{100}&\frac{85}{100}\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(i-1)\\x_2(i-1)\\x_3(i-1)\end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\\x_3(n)\end{bmatrix}}_{x_n}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{15}{100}&\frac{10}{100}\\\frac{5}{100}&\frac{75}{100}&\frac{5}{100}\\\frac{5}{100}&\frac{10}{100}&\frac{85}{100}\end{bmatrix}^n}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{bmatrix}}_{x_0}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1,\frac{4}{5},\frac{7}{10}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

```
a = {{90/100, 15/100, 10/100}, {5/100, 75/100, 5/100}, {5/100, 10/100, 85/100}}
```

$$\left\{\left\{\frac{9}{10},\frac{3}{20},\frac{1}{10}\right\},\left\{\frac{1}{20},\frac{3}{4},\frac{1}{20}\right\},\left\{\frac{1}{20},\frac{1}{10},\frac{17}{20}\right\}\right\}$$

```
Eigenvalues[a]
```

$$\left\{1,\frac{4}{5},\frac{7}{10}\right\}$$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle\begin{pmatrix}13/7\\4/7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

```
Eigenvectors[a]
```

$$\left\{\left\{\frac{13}{7},\frac{4}{7},1\right\},\{-1,0,1\},\{1,-2,1\}\right\}$$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T\in R^{3\times3}$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

$$T=\begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
t = Transpose[%]
```

$$\left\{\left\{\frac{13}{7}, -1, 1\right\}, \left\{\frac{4}{7}, 0, -2\right\}, \{1, 1, 1\}\right\}$$

Βήμα 4. Τότε

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{bmatrix}=T^{-1}AT \Rightarrow A^n = TS^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n=\begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (4/5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (7/10)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n \to \infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty}(4/5)^n = 0, \lim_{n\to\infty}(7/10)^n = 0$) :

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 13/24 & 13/24 & 13/24 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 7/24 & 7/24 & 7/24 \end{bmatrix}$$

```
s = {{1, 0, 0}, {0, (4/5)^n, 0}, {0, 0, (7/10)^n}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{0, \left(\frac{4}{5}\right)^n, 0\right\}, \left\{0, 0, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right\}\right\}$$

```
t.s.Inverse[t] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+9\,8^n+13\,10^n) & -\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(10\,7^n+3\,8^n-13\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-15\,8^n+13\,10^n) \\ \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) & \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{7}{2}\right)^n 5^{1-n}\right) & \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-9\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(-10\,7^n+3\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+15\,8^n+7\,10^n) \end{pmatrix}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε την συνάρτηση *MatrixPower*[a,n] για να υπολογίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα a.

```
MatrixPower[a, n] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+9\,8^n+13\,10^n) & -\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(10\,7^n+3\,8^n-13\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-15\,8^n+13\,10^n) \\ \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) & \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{7}{2}\right)^n 5^{1-n}\right) & \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-9\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(-10\,7^n+3\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+15\,8^n+7\,10^n) \end{pmatrix}$$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n \to \infty$ είναι :

```
Limit[MatrixPower[a, n], n→ Infinity] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{24} & \frac{13}{24} & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή 1,2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n \to \infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 13/24 & 13/24 & 13/24 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 7/24 & 7/24 & 7/24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13/24 \\ 1/6 \\ 7/24 \end{bmatrix} \left(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0) \right) = \begin{bmatrix} 13/24 \\ 1/6 \\ 7/24 \end{bmatrix}$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών θα μπορούσε να λυθεί με την συνάρτηση RSolve του Mathematica όπως παρακάτω :

$$\text{RSolve}\Big[\Big\{x_1[k+1] == \frac{90}{100} x_1[k] + \frac{15}{100} x_2[k] + \frac{10}{100} x_3[k],\ x_2[k+1] == \frac{5}{100} x_1[k] + \frac{75}{100} x_2[k] + \frac{5}{100} x_3[k],$$
$$x_3[k+1] == \frac{5}{100} x_1[k] + \frac{10}{100} x_2[k] + \frac{85}{100} x_3[k],\ x_1[0] + x_2[0] + x_3[0] == 1\Big\}, \{x_1[k], x_2[k], x_3[k]\}, k\Big] \ //\ \text{FullSimplify}$$

$$\Big\{\Big\{x_1[k] \to \frac{1}{3} 2^{-3-2k}\, 25^{-k} \left(-9\, 2^{3+k} 5^k 7^{1+k} + 253\, 2^{1+k} 35^k + 9\, 80^k + 13\, 100^k - 12 (70^k + 80^k)\, C[2] - 3\, 2^{3+4k} 5^k C[3]\right),$$
$$x_2[k] \to \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^k\right) + \left(\frac{7}{10}\right)^k C[2],$$
$$x_3[k] \to \frac{1}{3} 2^{-3-2k}\, 625^{-k} \left(2^{1+k} 875^k - 9\, 2000^k + 7\, 2500^k + 12 (-1750^k + 2000^k)\, C[2] + 3 (5^{1+3k} 16^k + 3\, 2000^k)\, C[3]\right)\Big\}\Big\}$$

Σημείωση. Όλα αυτά ισχύουν κάτω από την προϋπόθεση ότι η διαδικασία είναι μαρκοβιανή, ότι δηλαδή η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της διαδικασίας, όταν η παρούσα κατάσταση είναι γνωστή δεν αλλοιώνεται από επιπλέον δεδομένα που αφορούν την συμπεριφορά της διαδικασίας στο παρελθόν. ■

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_3'(x) = -y_1(x) - y_2(x) + 2y_3(x) \end{cases}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x *και ισχύει* $y_1(0)=2, y_2(0)=0, y_3(0)=1$

Απάντηση

Το παραπάνω σύστημα θα μπορούσε να λυθεί με την συνάρτηση DSolve του Mathematica ως εξής :

```
DSolve[{y1'[x] == 3 y1[x] + y2[x], y2'[x] == y1[x] + 3 y2[x], y3'[x] == -y1[x] - y2[x] + 2 y3[x],
  y1[0] == 2, y2[0] == 0, y3[0] == 1}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]
```

$\{\{y_1[x] \to e^{2x}(1+e^{2x}), y_2[x] \to e^{2x}(-1+e^{2x}), y_3[x] \to -e^{2x}(-2+e^{2x})\}\}$

Παράδειγμα

Naεπιλύσετε την εξίσωση

$$X^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -16 & -50 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}}_{A}, \quad X \in M_2[\mathbb{R}]$$

Απάντηση

In[1]:= `a = {{-16, -50}, {10, 29}}`

Out[1]= $\begin{pmatrix} -16 & -50 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}$

In[2]:= `x = {{x1, x2}, {x3, x4}}`

Out[2]= $\begin{pmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{pmatrix}$

In[3]:= `Solve[x.x == a, {x1, x2, x3, x4}]`

Out[3]= $\{\{x1 \to -22, x4 \to 23, x2 \to -50, x3 \to 10\}, \{x1 \to -2, x4 \to 7, x2 \to -10, x3 \to 2\},$
$\{x1 \to 2, x4 \to -7, x2 \to 10, x3 \to -2\}, \{x1 \to 22, x4 \to -23, x2 \to 50, x3 \to -10\}\}$ ■

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί η ν-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Απάντηση.

In[1]:= `a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}`

Out[1]= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

In[2]:= `MatrixPower[a, n] // Simplify`

Out[2]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) \\ \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) \\ \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n) \end{pmatrix}$ ■

Παράδειγμα. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει το ποσοστό μετακίνησης φοιτητών μεταξύ Πανεπιστήμιων λόγω μετεγγραφών.

	Πανεπιστήμιο Πατρών	Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πανεπιστήμιο Πατρών	70%	15%	15%
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	5%	80%	15%
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης	5%	20%	75%

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των φοιτητών παραμένει σταθερός (δεν προσθέτουμε δηλαδή τον πληθυσμό των φοιτητών που εγγράφεται κάθε χρονιά) τι ποσοστό των φοιτητών παραμένει σε κάθε Πανεπιστήμιο μετά από 2,3,4,... χρόνια;

Απάντηση.

Έστω $x_k(i)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να είναι στο Πανεπιστήμιο k στο τέλος του χρόνου i, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στο Πανεπιστήμιο i να είναι στο Πανεπιστήμιο j στην επόμενη χρονική παρατήρηση. Εύκολα παρατηρούμε ότι :

$$x_1(i) = \frac{70}{100}x_1(i-1) + \frac{5}{100}x_2(i-1) + \frac{5}{100}x_3(i-1)$$
$$x_2(i) = \frac{15}{100}x_1(i-1) + \frac{80}{100}x_2(i-1) + \frac{20}{100}x_3(i-1)$$
$$x_3(i) = \frac{15}{100}x_1(i-1) + \frac{15}{100}x_2(i-1) + \frac{75}{100}x_3(i-1)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{70}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{80}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{15}{100} & \frac{75}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{70}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{80}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{15}{100} & \frac{75}{100} \end{bmatrix}}_{A}^{n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1, \frac{13}{20}, \frac{3}{5}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

```
In[1]:= a = {{70 / 100, 5 / 100, 5 / 100},
    {15 / 100, 80 / 100, 20 / 100},
    {15 / 100, 15 / 100, 75 / 100}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

```
In[2]:= Eigenvalues[a]
```

Out[2]= $\left\{1, \frac{13}{20}, \frac{3}{5}\right\}$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 8/21 \\ 9/7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

```
In[3]:= Eigenvectors[a]
```

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{9}{7} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T \in R^{3\times 3}$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

$$T = \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
In[4]:= t = Transpose[%]
```

$$\text{Out[4]=} \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -1 & 0 \\ \frac{9}{7} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13/20 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} = T^{-1}AT \Rightarrow A^n = TS^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(13/20\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(3/5\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n \to \infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty}\left(13/20\right)^n = 0, \lim_{n\to\infty}\left(3/5\right)^n = 0$) :

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 27/56 & 27/56 & 27/56 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

```
In[5]:= MatrixPower[a, n] // Simplify
```

$$\text{Out[5]=} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} + \frac{3}{7} 2^{1-2n} \left(\frac{13}{5}\right)^n & \frac{1}{7}\left(1 - \left(\frac{13}{20}\right)^n\right) & \frac{1}{7}\left(1 - \left(\frac{13}{20}\right)^n\right) \\ \frac{3}{56}\left(9 + 7\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{13}{5}\right)^n 4^{2-n}\right) & \frac{27}{56} + \frac{1}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^n + \frac{1}{8} 3^{n+1} 5^{-n} & \frac{27}{56} + \frac{1}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^n - \frac{1}{8} 3^n 5^{1-n} \\ -\frac{3}{8}\left(-1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) & -\frac{3}{8}\left(-1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) & \frac{1}{8}\left(3 + 3^n 5^{1-n}\right) \end{pmatrix}$$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n \to \infty$ είναι :

```
In[6]:= Limit[MatrixPower[a, n], n→ Infinity]
```

Out[6]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{27}{56} & \frac{27}{56} & \frac{27}{56} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να παραμείνει στο Πανεπιστήμιο 1, 2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n\to\infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 27/56 & 27/56 & 27/56 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 \\ 27/56 \\ 3/8 \end{bmatrix} \left(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)\right) = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 27/56 \\ 3/8 \end{bmatrix}$$

■

Παράδειγμα. Να επιλύσετε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$F_{k+2} = 5F_{k+1} - 6F_k$$

όπου $F_1 = F_2 = 1$.

Σημείωση. Θέσε $x_k = F_k, y_k = F_{k+1} = x_{k+1}$ και προσπάθησε να γράψεις τις εξισώσεις που προκύπτουν ως

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Απάντηση.

Μετά τον μετασχηματισμό θα πάρουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}}_{z_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}}_{z_k}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που έχει λύση την

$$z_k = A^k z_0 = A^{k-1} A z_0 = A^{k-1} z_1$$

ή ισοδύναμα την

$$z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k - 3^{k-1} \\ 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \Rightarrow F_k = 2^k - 3^{k-1}$$

```
In[1]:= RSolve[{f[k+2] == 5 f[k+1] - 6 f[k], f[1] == 1, f[2] == 1}, f[k], k]
```

Out[1]= $\left\{\left\{f(k) \to \frac{1}{3}\left(3\,2^k - 3^k\right)\right\}\right\}$

■

Παράδειγμα. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} y_1^{'}(x) = -2y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_2^{'}(x) = -y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x και ισχύει $y_1(2) = 2, y_2(2) = 4$.

Απάντηση.

```
In[1]:= DSolve[
          {D[y1[x], x] == -2 y1[x] + 3 y2[x],
           D[y2[x], x] == -y1[x] + 2 y2[x],
           y1[2] == 2,
           y2[2] == 4},
          {y1[x], y2[x]}, x]
```

Out[1]= $\{\{y1(x) \to e^{-x-2}(-3 e^4 + 5 e^{2x}), y2(x) \to e^{-x-2}(-e^4 + 5 e^{2x})\}\}$

Παράδειγμα. Προσπαθήστε να λύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$$

όπου $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

Απάντηση.

```
In[1]:= DSolve[
          {y'''[x] - 2 y''[x] - y'[x] + 2 y[x] == 0,
           y[0] == 1,
           y'[0] == 0,
           y''[0] == 1},
          y[x], x]
```

Out[1]= $\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{2} e^{-x} (1 + e^{2x})\right\}\right\}$

Παράδειγμα. Να επιλύσετε την εξίσωση

$$X^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_{A}, \ X \in M_2[\mathbb{R}]$$

Απάντηση.

```
In[1]:= a = {{-2, -3}, {6, 7}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

```
In[2]:= x = {{x1, x2}, {x3, x4}}
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{pmatrix}$

```
In[3]:= Solve[x.x == a, {x1, x2, x3, x4}]
```

Out[3]= $\{\{x1 \to -4, x4 \to 5, x2 \to -3, x3 \to 6\}, \{x1 \to 0, x4 \to -3, x2 \to 1, x3 \to -2\},$
$\{x1 \to 0, x4 \to 3, x2 \to -1, x3 \to 2\}, \{x1 \to 4, x4 \to -5, x2 \to 3, x3 \to -6\}\}$

■

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 1 & i \\ 2 & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{C}]$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι $\{3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

```
a = {{1, I, 2}, {-I, 1, I}, {2, -I, 1}}
{{1, ⅈ, 2}, {-ⅈ, 1, ⅈ}, {2, -ⅈ, 1}}
Eigenvalues[a]
{3, -√3, √3}
```

ενώ τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα είναι

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -i\left(-1+\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i\left(1+\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

```
Eigenvectors[a] // FullSimplify
{{1, 0, 1}, {-1, -ⅈ (-1 + √3), 1}, {-1, ⅈ (1 + √3), 1}}
```

Παρατήρησε ότι τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. ■

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

Είναι γνωστό από το παράδειγμα 10.1.11 ότι μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι το $\lambda = -1$ στο οποίο αντιστοιχεί και το ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα αυτό ώστε να έχει μήκος 1 και συνεπώς να πάρουμε στη θέση του το $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt υπολογίζουμε 2 διανύσματα v, w τέτοια ώστε τα $\{u, v, w\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Αρχικά παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt έχουμε:

$$u_1 = u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; v_1 = v - \frac{v \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = w - \frac{w \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} u_1 - \frac{w \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ένας άλλος τρόπος που θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε για να συμπληρώσουμε την βάση σε ορθοκανονική θα ήταν να υποθέσουμε ότι

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

με μέτρα 1

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$$

και κάθετα μεταξύ τους και με το διάνυσμα u,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 = 0, \frac{\sqrt{2}}{2} w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2 = 0, v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω (αρκετά δύσκολο) σύστημα θα πάρουμε :

```
Solve[{v1^2 + v2^2 + v3^2 == 1, w1^2 + w2^2 + w3^2 == 1, v1 + v2 == 0, w1 + w2 == 0, v1 w1 + v2 w2 + v3 w3 == 0},
 {v1, v2, v3, w1, w2, w3}]
```

Solve :: svars : Equations may not give solutions for all "solve " variables . More…

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big\{v_3\to -1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to \frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to 1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to 1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to \frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -\sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to -\sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -\sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to \sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to \sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to -\sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to \sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to \sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

Μια λύση εκ των οποίων είναι και αυτή που βρήκαμε με την μέθοδο Gram-Schmidt. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα Q που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, v_1, w_1\}$:

$$
Q=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

και εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό

$$
Q^T AQ=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -7 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει ήδη γίνει άνω τριγωνικός, γεγονός που δεν συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις. λόγω της επιλογής των διανυσμάτων u, v, w θα έχουμε

$$
u^T Au = u^T \lambda u = \lambda |u| = \lambda
$$

$$
v^T Au = v^T \lambda u = \lambda \left(v^T u\right) = 0
$$

$$
w^T Au = w^T \lambda u = \lambda \left(w^T u\right) = 0
$$

και συνεπώς καταφέραμε να πάρουμε τον πίνακα με την μορφή :

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} u^T Au & u^T Av & u^T Aw \\ v^T Au & v^T Av & v^T Aw \\ w^T Au & w^T Av & w^T Aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & u^T Av & u^T Aw \\ 0 & v^T Av & v^T Aw \\ 0 & w^T Av & w^T Aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

όπου $A_1 \in M_2[\mathbb{R}], a \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία που κάναμε για τον πίνακα A, και στον υποπίνακα A_1. Δηλαδή υπολογίζουμε μια ιδιοτιμή του A_1 π.χ. $\lambda = 2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ το οποίο είναι ήδη κανονικοποιημένο ώστε να έχει μήκος 1. Υπολογίζω κάνοντας χρήση της μεθόδου Gram-Schmidt ένα δεύτερο διάνυσμα v τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\{u, v\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι έχουμε $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ και σχηματίζουμε τον πίνακα S που έχει ως στήλες τα διανύσματα $\{u, v\}$. Θα έχουμε

$$S^T A_1 S = T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που είναι άνω τριγωνικός. Ορίζουμε λοιπόν τον ορθογώνιο πίνακα

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{S} \end{bmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας

$$R^T Q^T AQR$$

είναι άνω τριγωνικός. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο ορθογώνιος πίνακας που ψάχνουμε είναι ο QR που είναι ορθογώνιος ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί εύκολα να γενικευτεί σε πίνακες μεγαλυτέρων διαστάσεων.

Το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με χρήση της συνάρτησης *SchurDecomposition* του *Mathematica* που επιστρέφει δύο πίνακες q (ορθογώνιος) και t (άνω τριγωνικός) τέτοιους ώστε $q^T aq = t$, όπως φαίνεται παρακάτω.

```
In[1]:= a = {{4, -5, 1}, {2, -3, 1}, {0, 0, -1}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας που δέχεται η συνάρτηση *SchurDecomposition* πρέπει να είναι αριθμητικός και αυτός είναι ο λόγος της συνάρτησης N[] που χρησιμοποιείται στην παρακάτω συνάρτηση.

```
In[2]:= {q, t} = SchurDecomposition[N[a]];
```

Ο πίνακας q που επιστρέφεται είναι ο ορθογώνιος πίνακας που αναζητούμε

```
In[3]:= q
```

Out[3]= $\begin{pmatrix} 0.928477 & -0.371391 & 0. \\ 0.371391 & 0.928477 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$

ενώ ο πίνακας t είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας που αναζητούμε

In[4]:= **t**

Out[4]= $\begin{pmatrix} 2. & -7. & 1.29987 \\ 0. & -1. & 0.557086 \\ 0. & 0. & -1. \end{pmatrix}$

έτσι ώστε $q^T a q = t$

In[5]:= **Transpose[q].a.q - t**

Out[5]= $\begin{pmatrix} 4.44089\times 10^{-16} & 0. & 0. \\ -1.11022\times 10^{-16} & -2.22045\times 10^{-16} & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$

■

Παράδειγμα. Υπολογίστε μια ορθομοναδιαία βάση για τον χώρο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας στην μορφή $A = QDQ^T$ (Schur παραγοντοποίηση).

Απάντηση.

Βήμα 1^o. Ορίζουμε τον πίνακα *A*.

In[1]:= **a = {{2, -2, 1}, {-2, -1, 2}, {1, 2, 2}}**

Out[1]= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Βήμα 2^o. Καλούμε το πακέτο “Orthogonalization” που ανήκει στο πακέτο “LinearAlgebra” και το οποίο διαθέτει συναρτήσεις για την ορθοκανονικοποίηση των διανυσμάτων μιας βάσης.

In[2]:= **<< LinearAlgebra`Orthogonalization`**

Βήμα 3^o. Υπολογίζουμε τον πίνακα *Q* ορθοκανονικοποιόντας την βάση που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* (η ορθοκανονικοποίηση γίνεται με την μέθοδο GramSchmidt).

In[3]:= **q = Transpose[GramSchmidt[Eigenvectors[a]]]**

Out[3]= $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Βήμα 4^o. Υπολογίζουμε τον διαγώνιο πίνακα *D*.

In[4]:= `Transpose[q].a.q // Simplify`

Out[4]= $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

■

Παράδειγμα. Σε έναν δήμο υπάρχουν 3 μεγάλα super-market. Αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός του συγκεκριμένου δήμου είναι σταθερός, έχει παρατηρηθεί μια μετακίνηση πελατών από το ένα κατάστημα στο άλλο. Ποιο συγκεκριμένα τον Ιανουάριο, το ½ του πληθυσμού ψώνιζε από το κατάστημα Α, ¼ από το κατάστημα Β και ¼ από το κατάστημα Γ. Κάθε μήνα το κατάστημα Α κρατάει το 90% των πελατών του ενώ το 5% των πελατών του μετακινείται στο κατάστημα Β και το υπόλοιπο 5% στο κατάστημα Γ. Το κατάστημα Β κρατάει το 50% των πελατών του ενώ το 45% μετακινείται στο κατάστημα Α και το 5% στο κατάστημα Γ. Τέλος το κατάστημα Γ διατηρεί το 60% των πελατών του ενώ 20% των πελατών του μετακινείται στο κατάστημα Α και 20% στο κατάστημα Β. Εφόσον υπολογίσετε τον πίνακα μετάβασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα, να υπολογίσετε τους πελάτες του καταστήματος τον μήνα Φεβρουάριο και Μάρτιο. Αν υποθέσουμε ότι ο ίδιος κανόνας θα συνεχίσει να ισχύει στο μέλλον να υπολογίσετε ποια θα είναι η οριακή τιμή των ποσοστών του πληθυσμού που θα αντιστοιχούν σε κάθε κατάστημα.

Απάντηση.

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Κατάστημα Α	Κατάστημα Β	Κατάστημα Γ
Κατάστημα Α	90%	5%	5%
Κατάστημα Β	45%	50%	5%
Κατάστημα Γ	20%	20%	60%

Έστω $x_k(i)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να πηγαίνει στο κατάστημα k στην αρχή κάθε μήνα i, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στο κατάστημα i να πάει στο κατάστημα j τον επόμενο μήνα. Εύκολα παρατηρούμε ότι :

$$\begin{aligned} x_1(i) &= \frac{90}{100}x_1(i-1)+\frac{45}{100}x_2(i-1)+\frac{20}{100}x_3(i-1) \\ x_2(i) &= \frac{5}{100}x_1(i-1)+\frac{50}{100}x_2(i-1)+\frac{20}{100}x_3(i-1) \\ x_3(i) &= \frac{5}{100}x_1(i-1)+\frac{5}{100}x_2(i-1)+\frac{60}{100}x_3(i-1) \end{aligned}$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Ο πίνακας μετάβασης συνεπώς θα είναι ο :

$$A=\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{45}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{50}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{5}{100}&\frac{60}{100}\end{bmatrix}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\\x_3(n)\end{bmatrix}}_{x_n}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{45}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{50}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{5}{100}&\frac{60}{100}\end{bmatrix}^n}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{bmatrix}}_{x_0}$$

Συνεπώς για τον μήνα Φεβρουάριο και Μάρτιο η λύση που αναζητούμε είναι η παρακάτω :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\\x_3(1)\end{bmatrix}}_{x_1}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{45}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{50}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{5}{100}&\frac{60}{100}\end{bmatrix}^1}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1/2\\1/4\\1/4\end{bmatrix}}_{x_0}=\begin{bmatrix}49/80\\1/5\\3/16\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0.6125\\0.2\\0.1875\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\\x_3(2)\end{bmatrix}}_{x_2}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{90}{100}&\frac{45}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{50}{100}&\frac{20}{100}\\ \frac{5}{100}&\frac{5}{100}&\frac{60}{100}\end{bmatrix}^2}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1/2\\1/4\\1/4\end{bmatrix}}_{x_0}=\begin{bmatrix}543/800\\269/1000\\49/320\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0.67875\\0.168125\\0.153125\end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1,\frac{11}{20},\frac{9}{20}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

```
In[1]:= a = {{90/100, 45/100, 20/100}, {5/100, 50/100, 20/100}, {5/100, 5/100, 60/100}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{9}{20}&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{20}&\frac{1}{2}&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{20}&\frac{1}{20}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

In[2]:= **Eigenvalues[a]**

Out[2]= $\left\{1, \frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right\}$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 76/11 \\ 12/11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

In[3]:= **Eigenvectors[a]**

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{11} & \frac{12}{11} & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T \in M_3[\mathbb{R}]$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

$$T = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[4]:= **t = Transpose[%]**

Out[4]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{11} & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{12}{11} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Βήμα 4. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/20 & 0 \\ 0 & 0 & 9/20 \end{bmatrix} = T^{-1}AT \Rightarrow A^n = TS^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(11/20\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(9/20\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n \to \infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty}\left(11/20\right)^n = 0, \lim_{n\to\infty}\left(9/20\right)^n = 0$) :

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 76/99 & 76/99 & 76/99 \\ 4/33 & 4/33 & 4/33 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

```
In[5]:= t.{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}.Inverse[t]
```

Out[5]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{99} & \frac{76}{99} & \frac{76}{99} \\ \frac{4}{33} & \frac{4}{33} & \frac{4}{33} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

```
In[6]:= MatrixPower[a, n] // Simplify
```

Out[6]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{99} 2^{-2n-1} 5^{-n} (19\, 2^{2n+3} 5^n - 9^{n+1} + 5\, 11^{n+1}) & \frac{1}{99} 2^{-2n-1} 5^{-n} (19\, 2^{2n+3} 5^n - 23\, 9^{n+1} + 5\, 11^{n+1}) & \frac{76}{99} + \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 4^{2-n} - \frac{1}{9} 11^n 20^{1-n} \\ \frac{4}{33} + \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 2^{-2n-1} - \frac{1}{3} 2^{-2n-1}\left(\frac{11}{5}\right)^n & \frac{4}{33} + \frac{23}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 2^{-2n-1} - \frac{1}{3} 2^{-2n-1}\left(\frac{11}{5}\right)^n & \frac{4}{33} + \frac{1}{3}\left(\frac{11}{5}\right)^n 4^{1-n} - \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 4^{2-n} \\ \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n\right) & \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n\right) & \frac{1}{9}\left(1 + 2^{3-2n}\left(\frac{11}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix}$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n \to \infty$ είναι :

```
In[7]:= Limit[%, n→ Infinity]
```

Out[45]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{99} & \frac{76}{99} & \frac{76}{99} \\ \frac{4}{33} & \frac{4}{33} & \frac{4}{33} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να παραμείνει στο κατάστημα 1, 2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n \to \infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 76/99 & 76/99 & 76/99 \\ 4/33 & 4/33 & 4/33 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 76/99 \\ 4/33 \\ 1/9 \end{bmatrix} \left(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)\right) = \begin{bmatrix} 76/99 \\ 4/33 \\ 1/9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.767677 \\ 0.121212 \\ 0.111111 \end{bmatrix}$$

■

Παράδειγμα. Προσπάθησε να λύσεις την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$F_{k+2} = 2F_{k+1} - F_k$$

όπου $F_1 = 1, F_2 = 2$.

Απάντηση.

In[1]:=
```
RSolve[{f[k+2] == 5 f[k+1] - 6 f[k], f[1] == 1, f[2] == 1}, f[k], k]
```

Out[1]= $\left\{\left\{f(k) \to \frac{1}{3}\left(3\,2^k - 3^k\right)\right\}\right\}$

■

Παράδειγμα. Υπολογίστε μια ορθομοναδιαία βάση για τον χώρο των ιδιοδιανυσμάτων των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Να παραγοντοποιηθούν οι πίνακες στην μορφή $A = QDQ^T \left(B = QDQ^T\right)$ (Schur παραγοντοποίηση).

Απάντηση.

*Βήμα 1^o^*. Ορίζουμε τον πίνακα *A*.

In[1]:=
```
a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

*Βήμα 2^o^*. Καλούμε το πακέτο “Orthogonalization” που ανήκει στο πακέτο “LinearAlgebra” και το οποίο διαθέτει συναρτήσεις για την ορθοκανονικοποίηση των διανυσμάτων μιας βάσης.

In[2]:=
```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

*Βήμα 3^o^*. Υπολογίζουμε τον πίνακα *Q* ορθοκανονικοποιόντας την βάση που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* (η ορθοκανονικοποίηση γίνεται με την μέθοδο GramSchmidt).

In[3]:=
```
q = Transpose[GramSchmidt[Eigenvectors[a]]]
```

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

*Βήμα 4^o^*. Υπολογίζουμε τον διαγώνιο πίνακα *D*.

In[4]:=
```
Transpose[q].a.q // Simplify
```

Out[4]= $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

■

11. Πραγματικές τετραγωνικές μορφές.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Απάντηση.
Θα μπορούσαμε στο Mathematica να ορίσουμε τον πίνακα A

```
a = {{2, 1, 1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 2}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του

```
Eigenvalues[a]
```

{4, 1, 1}

οι οποίες είναι όλες θετικές και συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. ■

Παράδειγμα

Δείξτε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Απάντηση.
Θα μπορούσαμε στο πρόγραμμα Mathematica να καλέσουμε το πακέτο MatrixManipulations που ανήκει στο πακέτο LinearAlgebra με την παρακάτω εντολή:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

και στη συνέχεια εφόσον δηλώσουμε τον πίνακα A

```
a = {{2, -1, -3}, {-1, 2, 4}, {-3, 4, 9}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

και εκτελέσουμε την παρακάτω επανάληψη :

```
For[i = 1, i ≤ 3,
 a1 = TakeMatrix[a, {1, 1}, {i, i}];
 Print[a1];
 Print[Det[a1]];
 i++]
```

θα πάρουμε ως αποτέλεσμα τους υποπίνακες ixi και τις ορίζουσες τους :

(2)

2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4

Στην δεύτερη γραμμή της επανάληψης υπολογίζουμε τον υποπίνακα του A που βρίσκεται μεταξύ των στοιχείων {1,1} και {i,i}, τον οποίο εκτυπώνουμε με την εντολή στην 3^{η} γραμμή και υπολογίζουμε και εκτυπώνουμε την ορίζουσα στην 4^{η} γραμμή. Θα μπορούσαμε μάλιστα να γράψουμε ένα σύντομο πρόγραμμα που θα κάνει την παραπάνω διαδικασία και θα επιστρέφει την τιμή True αν ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και False διαφορετικά. Μάλιστα θα επιστρέφει το μήνυμα «Error – The matrix is not symmetric» στην περίπτωση που ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός.

```
positiveMatrix[a_] :=
 Module[{i, cond, a0},
  a0 = a;
  If[a0 ≠ Transpose[a0],
   Print["Error-The matrix is not symmetric"],
   cond = True;
   For[i = 1, i ≤ Length[a0],
    a1 = TakeMatrix[a0, {1, 1}, {i, i}];
    If[Det[a1] < 0, cond = False];
    i++];
   Return[cond]];]
```

```
positiveMatrix[a]
```

True

Μπορείτε να κάνετε μια αντίστοιχη συνάρτηση για αρνητικά ορισμένους πίνακες ; ■

Παράδειγμα

Να βρεθεί η διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής $q\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Λύση

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον πίνακα A στο Mathematica :

```
a = {{1, -2, 0}, {-2, 0, 2}, {0, 2, -1}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια εφόσον υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α :

```
Eigensystem[a]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ \{-1, -2, 2\} & \{-2, 2, 1\} & \{2, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

να ορθοκανονικοποιήσουμε την βάση του ιδιοχώρου του πίνακα Α :

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
p = Transpose[GramSchmidt[%%[[2]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι :

```
Transpose[p].a.p
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό :

$$x = Py \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

θα πάρουμε

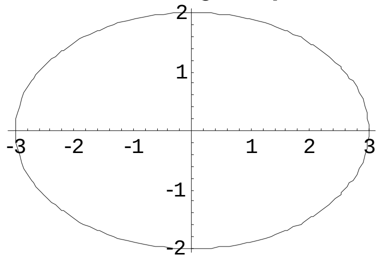
$$q(x_1, x_2, x_3) = -3y_1^2 + 3y_2^2 + 0y_3^2 = -3\left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 \blacksquare$$

Παράδειγμα (κωνικές τομές στο επίπεδο).

Έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

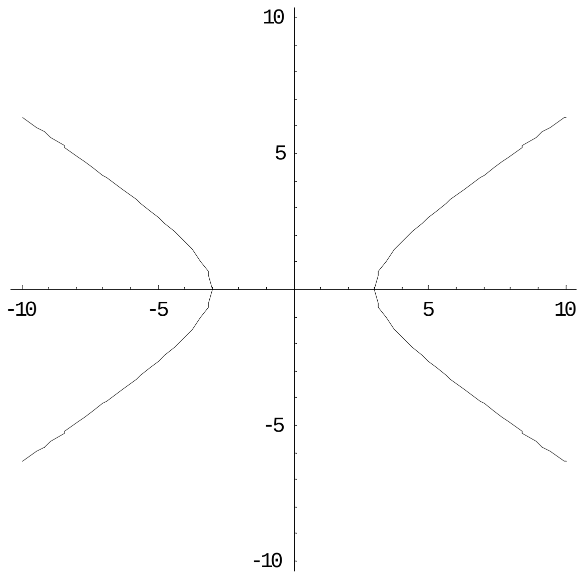
(Εάν $\alpha = \beta$ τότε έχουμε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα το α ή β)

```
<< Graphics`
ImplicitPlot[x^2/9 + y^2/4 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



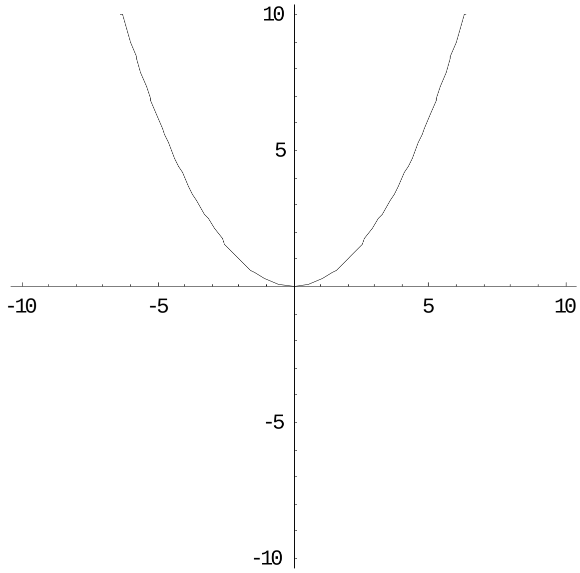
Υπερβολή $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\dfrac{y^2}{\alpha^2}-\dfrac{x^2}{\beta^2}=1,\quad \alpha,\beta>0$

```
ImplicitPlot[x^2/9 - y^2/4 == 1, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

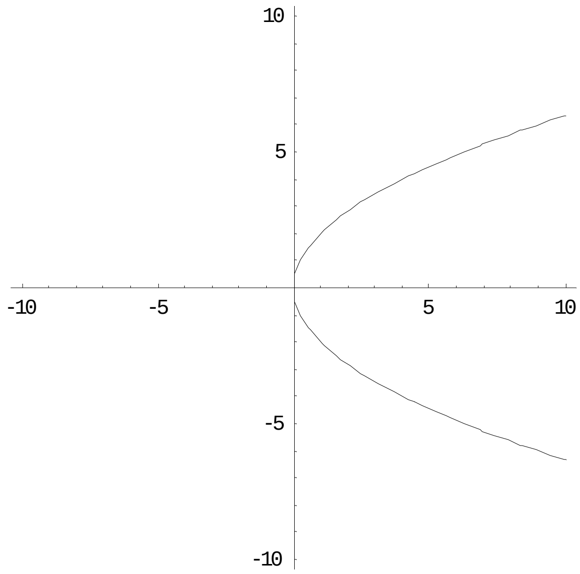


Παραβολή $x^2=\alpha y$ ή $y^2=\alpha x$,

```
ImplicitPlot[x^2 == 4 y, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, AxesOrigin → {0, 0}]
```




```
ImplicitPlot[y^2 == 4 x, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



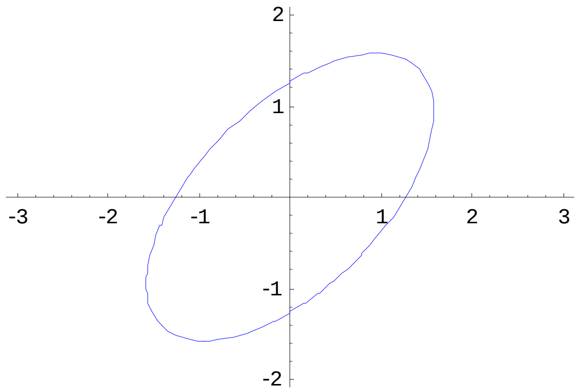
Παράδειγμα

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0\,.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών xy και επομένως έχουμε μία περιστροφή της κωνικής τομής.

```
p1 = ImplicitPlot[5 x^2 - 6 x y + 5 y^2 - 8 == 0, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Η τετραγωνική μορφή της είναι η $5x-6xy+5y^2$. Διαγωνοποιόντας την τετραγωνική μορφή παίρνουμε

$$x^T Ax = (x, y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Άρα, $\left|A-\lambda I_2\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) = 0$. Επομένως $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$ είναι οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A. Τα αντίστοιχα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα είναι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, $D = P^T AP$ και επομένως $x^T Ax = y^T Dy$.

Η διαγώνια (νέα τετραγωνική) μορφή είναι

$$(x_1, y_1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 8y_1^2.$$

Επομένως,

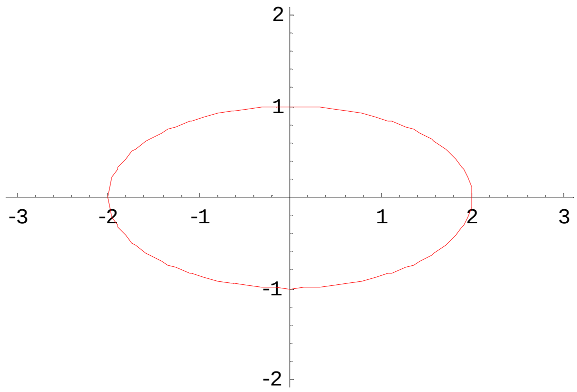
$$2x_1^2 + 8y_1^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + 8y_1^2 = 8$$

Διαιρώντας με το 8 παίρνουμε

$$\frac{x_1^2}{2^2} + y_1^2 = 1,$$

δηλαδή, έχουμε μία έλλειψη.

```
p2 = ImplicitPlot[x^2/4 + y^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]
```



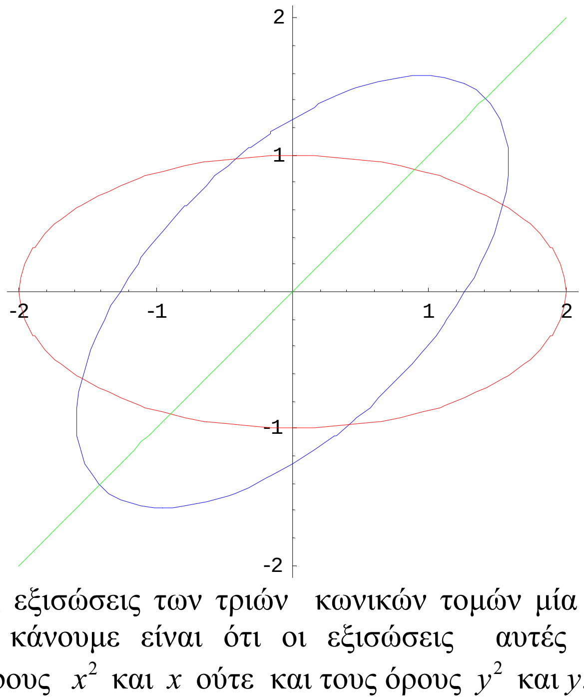
Ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\theta = 45^\circ$. Δηλαδή η έλλειψη περιστρέφετε κατά γωνία $\theta = 45^\circ$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(45^0\right) & -\sin\left(45^0\right) \\ \sin\left(45^0\right) & \cos\left(45^0\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

```
p3 = ImplicitPlot[x == y, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0]}]
Show[p1, p2, p3]
```



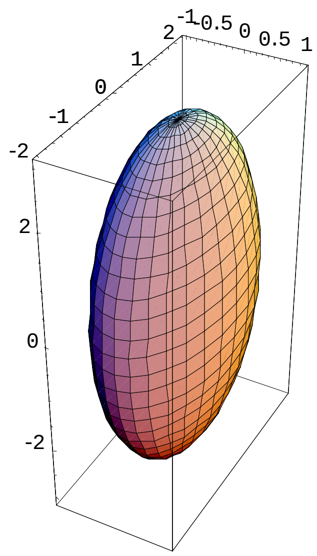
Επιστρέφοντας στις εξισώσεις των τριών κωνικών τομών μία ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι οι εξισώσεις αυτές δεν περιλαμβάνουν ταυτόχρονα τους όρους x^2 και x ούτε και τους όρους y^2 και y. Εάν λοιπόν έχουμε ένα από τα προαναφερθέντα ζεύγη, x^2 και x ή y^2 και y ενώ δεν υπάρχει ο όρος xy, τότε συμπεραίνουμε ότι η κωνική τομή έχει υποστεί μία μεταφορά.

Παράδειγμα (κωνικές τομές στον χώρο)

Ελλειψοειδές $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

(Εάν $\alpha=\beta=\gamma$ τότε έχουμε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα το α ή β ή γ)

```
<< Graphics`
ParametricPlot3D[
 {Cos[u] Cos[v], 2 Sin[u] Cos[v], 3 Sin[v]},
 {u, 0, 2 Pi},
 {v, -Pi / 2, Pi / 2}]
```



Γραφική παράσταση της $x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$

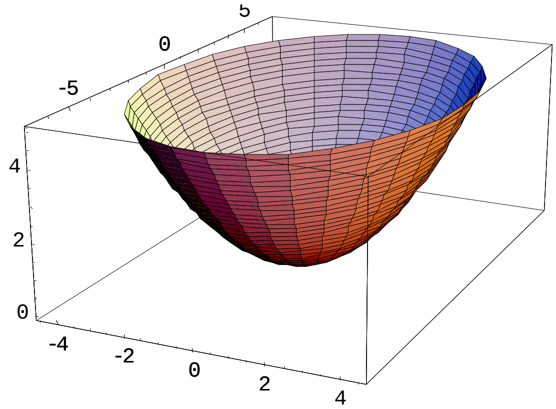
Παρατηρήστε ότι αν $x=\cos(u)\cos(v), y=2\sin(u)\cos(v), y=3\sin(v)$ τότε

```
(Cos[u] Cos[v])^2 + (2 Sin[u] Cos[v])^2 / 4 + (3 Sin[v])^2 / 9 // Simplify
```

1

Ελλειπτικό παραβολοειδές $$z=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$$

```
ParametricPlot3D[
 {2 Cos[v] √z, 3 Sin[v] √z, z},
 {v, 0, 2 Pi},
 {z, 0, 5}, ViewPoint -> {1.354, -2.922, 1.040}]
```



Γραφική παράσταση της $z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$

Παρατηρήστε ότι αν $x = 2\cos(v)\sqrt{z}, y = 3\sin(v)\sqrt{z}, z = z$ τότε :

Simplify$\left[\frac{(2\,\mathrm{Cos}[v]\,\sqrt{z})^2}{4} + \frac{(3\,\mathrm{Sin}[v]\,\sqrt{z})^2}{9} - z\right]$

0

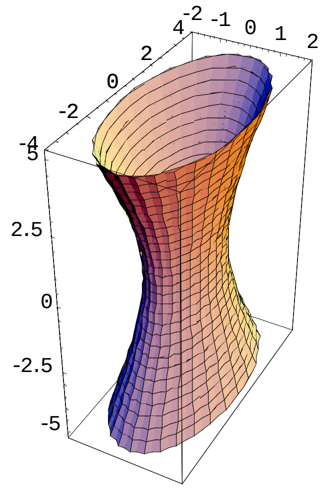
Μονόχωνο υπερβολοειδές $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$

ParametricPlot3D[

$\left\{\sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\,\mathrm{Cos}[v],\ 2\sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\,\mathrm{Sin}[v],\ z\right\},$

{v, -2 Pi, 2 Pi},

{z, -5, 5}]

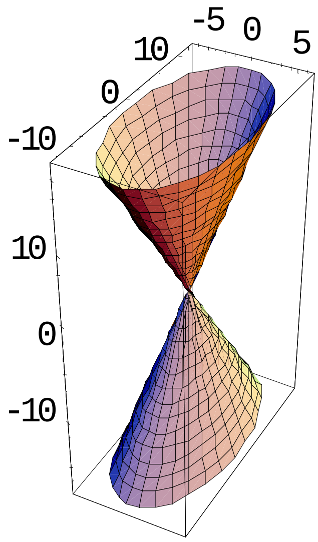


Γραφική παράσταση της $x^2 + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$

Παρατηρήστε ότι αν $x = \sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\cos(v), y = 2\sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\sin(v), z = z$ τότε :

$\left(\sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\,\mathrm{Cos}[v]\right)^2 + \frac{\left(2\sqrt{\frac{z^2}{9}+1}\,\mathrm{Sin}[v]\right)^2}{4} - \frac{(z)^2}{9}$ // **Simplify**

Κώνος $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$$



Γραφική παράσταση της $x^2+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=0$

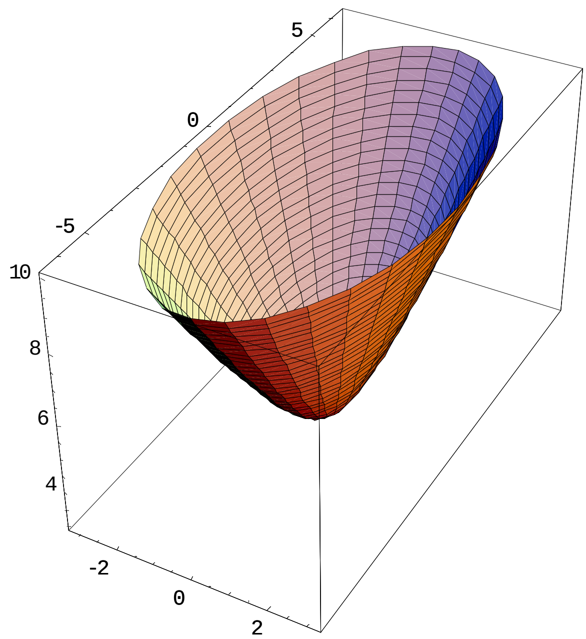
Παρατηρήστε ότι αν $x = z\cos(v), y = 2z\sin(v), z = 3z$ τότε :

```
(z Cos[v])^2 + (2 z Sin[v])^2/4 - (3 z)^2/9 // Simplify
```

0

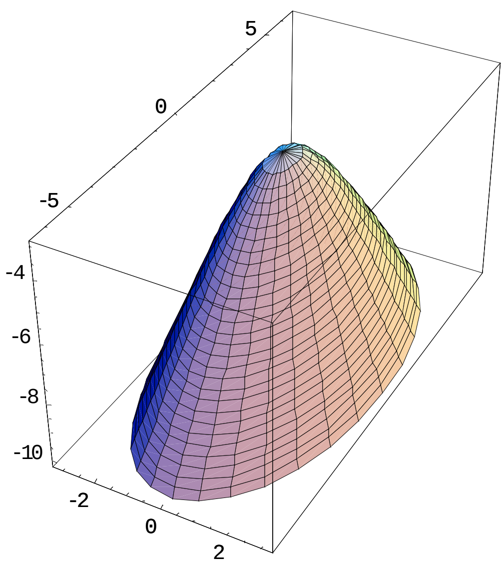
Δίχωνο υπερβολοειδές $$-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

```
p1 = ParametricPlot3D[
  {Sqrt[z^2/9 - 1] Cos[v], 2 Sqrt[z^2/9 - 1] Sin[v], z},
  {v, 0, 2 Pi},
  {z, 3, 10}]
```



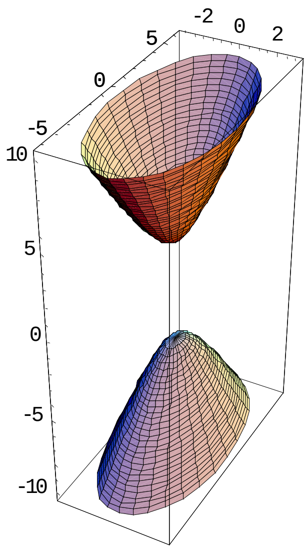
Γραφική παράσταση της $-x^2 - \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ για $z \in [3,10]$

```
p2 = ParametricPlot3D[
  {Sqrt[z^2/9 - 1] Cos[v], 2 Sqrt[z^2/9 - 1] Sin[v], z},
  {v, 0, 2 Pi},
  {z, -10, -3}]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2 - \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ για $z \in [-10,-3]$

```
Show[p1, p2]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2-\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$ για $z\in[-10,-3]\cup[3,10]$

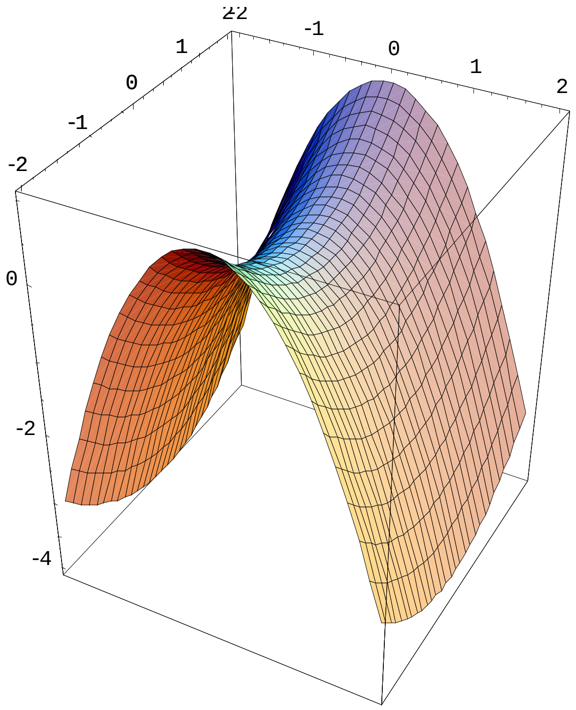
Παρατηρήστε ότι αν $x=\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\cos(v),y=2\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\sin(v),z=z$ τότε :

```
-(Sqrt[z^2/9 - 1] Cos[v])^2 - (2 Sqrt[z^2/9 - 1] Sin[v])^2/4 + (z)^2/9 // Simplify
```

1

Υπερβολικό παραβολοειδές $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=z$

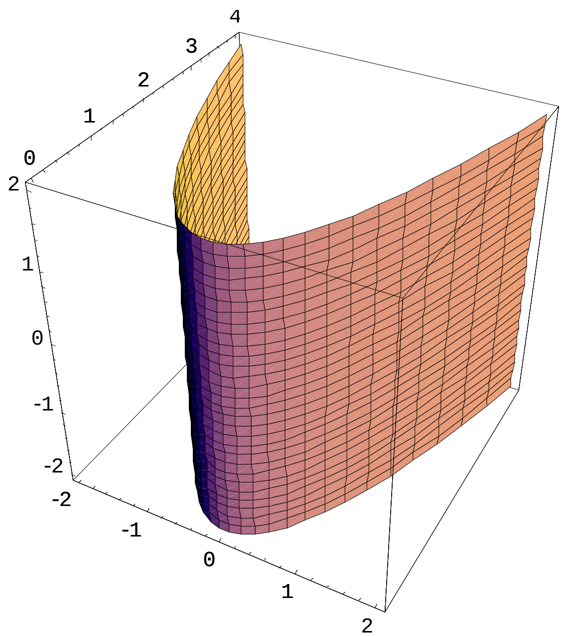
```
ParametricPlot3D[
 {x, y, y^2/4 - x^2},
 {x, -2, 2},
 {y, -2, 2}]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2+\dfrac{y^2}{2^2}=z$ για $x\in[-2,2], y\in[-2,2]$

Παραβολικός κύλινδρος $x^2 = ay\,,\qquad a>0$

```
ParametricPlot3D[
  {x, x^2, z},
  {x, -2, 2},
  {z, -2, 2}]
```



Γραφική παράσταση της $x^2 = y$ για $x\in[-2,2], y\in[-2,2]$